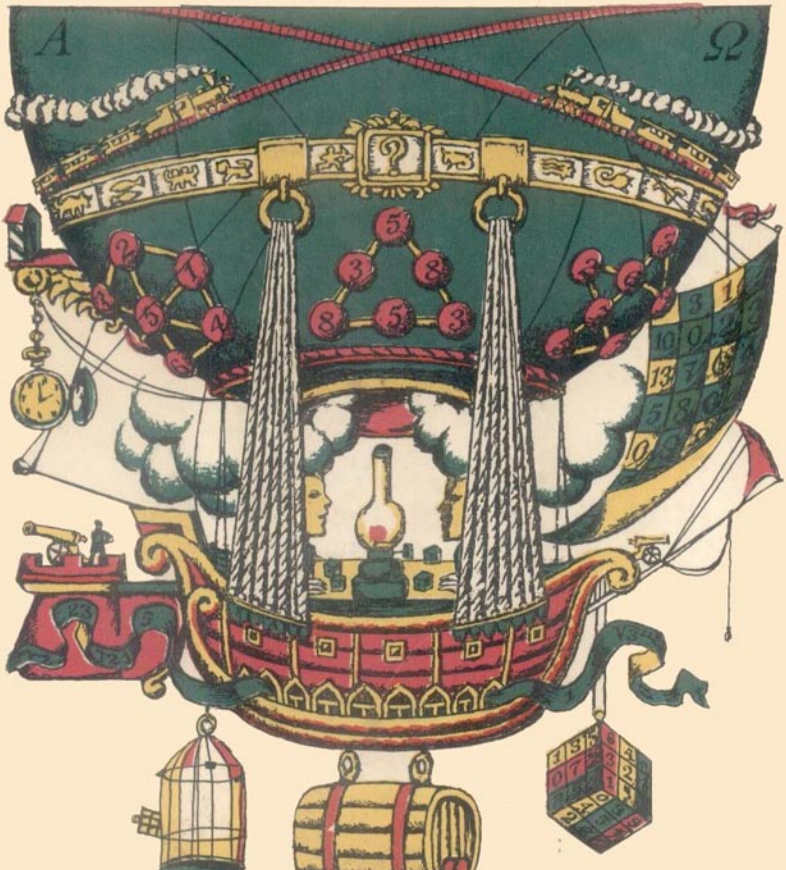
Ya.I.Perelman

Problemas y experimentos recreativos



EDITORIAL MIR MOSCÚ

Ya.I.Perelmán

Problemas y experimentos recreativos

ACERCA DEL AUTOR DE ESTE LIBRO

Ya. Perelmán

En 1913 se puso a la venta el libro del eminente pedagogo Yákov Isidórovich Perelmán «Física Recreativa». Esta obra conquistó pronto el corazón de sus lectores, sobre todo de la juventud, que halló en ella respuesta a muchos problemas que le preocupaban.

La «Física Recreativa» no sólo era interesante por la forma en que fue escrita, sino también porque contenía un enorme material cognoscitivo.

En el prólogo a la undécima edición, Ya. I. Perelmán escribía: «El objetivo fundamental de la «Física Recreativa» es estimular la fantasía científica, enseñar al lector a pensar con espíritu físico y crear en su mente numerosas asociaciones de conocimientos físicos relacionados con los fenómenos más diversos de la vida cotidiana y con todo aquello con que mantiene contacto». «Física Recreativa» se convirtió en uno de los libros más populares.

Ya. I. Perelmán nació en 1882 en la ciudad de Bielostok. En 1909 terminó sus estudios en el Instituto Forestal de San Petersburgo con el título de silvicultor.

Después de «Física Recreativa», Ya. I. Perelmán escribió otros libros, en los cuales se acreditó como magnífico popularizador de la ciencia. Sus obras más conocidas son: «Aritmética Recreativa», «Mecánica Recreativa», «Geometría Recreativa», «Astronomía Recreativa», «Matemáticas Animadas», «Física a cada paso», «Trucos y Pasatiempos» y otras. Ahora cada lector culto conoce estos libros.

También escribió varios libros dedicados a los problemas de los viajes interplanetarios («Viajes Interplanetarios», «A las Estrellas en Cohete», «Lejanías del Universo» y otros).

El gran científico K. E. Tsiolkovski tenía en gran estima el talento y la creación de Ya. I. Perelmán. En el prólogo al libro «Viajes Interplanetarios» escribía Tsiolkovski: «El autor es conocido desde hace tiempo por sus obras populares, ingeniosas y completamente científicas sobre física, astronomía y matemáticas, escritas además con un estilo maravilloso y fácil de asimilar por los lectores».

Ya. I. Perelmán es autor de toda una serie de libros de texto así como de diversos artículos en las revistas «El saber es Fuerza», «Técnica de la Juventud» y otras.

Ya. I. Perelmán no sólo se dedicó a la pedagogía y a la actividad científica y literaria. Dedicó también mucho tiempo a su enorme trabajo de redacción, ya que fue redactor de las revistas «La Naturaleza y los Hombres» y «En el Taller de la Naturaleza».

Ya. I. Perelmán murió el 16 de marzo de 1942 en Leningrado. Muchas han sido las generaciones que estudiaron con interés los amenos libros de Ya. I. Perelmán. Sus obras seguirán conmoviendo en el futuro a las nuevas generaciones.

Ya. I. Perelmán

Problemas y experimentos recreativos

Traducido del ruso por el ingeniero
Antonio Molina García

EDITORIAL MIR
MOSCÚ

Я. Перельман

ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ

ЗАДАЧИ

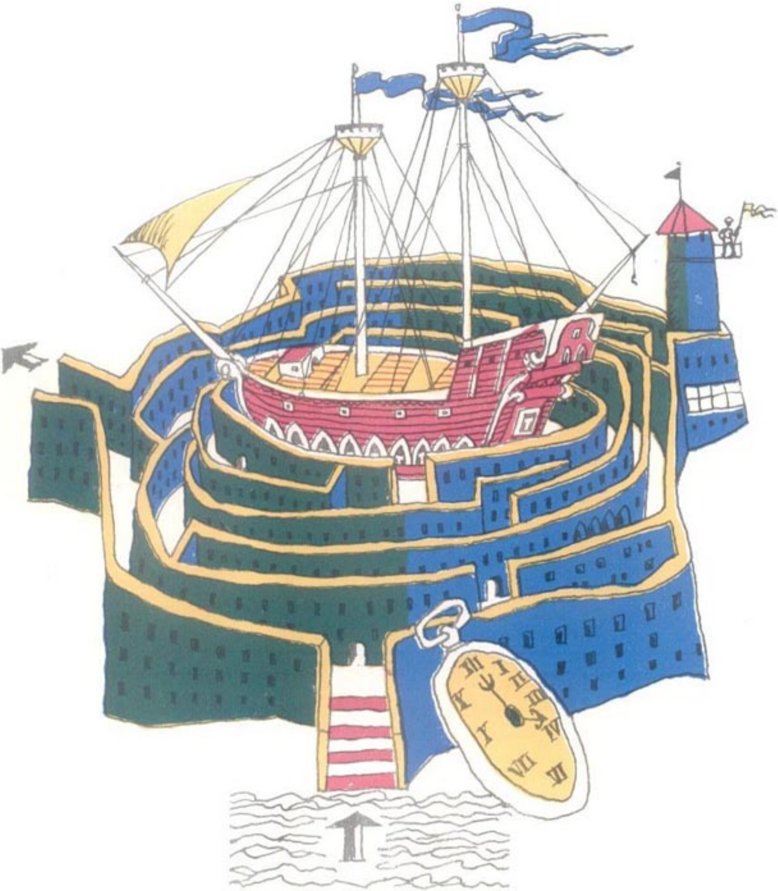
И ОПЫТЫ

Издательство
«Детская литература»

Presentación de
I. Kravtsov, V. Stúlikov
Ilustración de
I. Kravtsov,
V. Keidan,
I. Kabakov,
D. Lión,
S. Mújin,
L. Saksónov,
A. Sokolov,
V Stúlikov,
R. Varshamov,
Yu. Vaschenko

Impreso en la URSS, 1975

На испанском языке



Una hoja de periódico

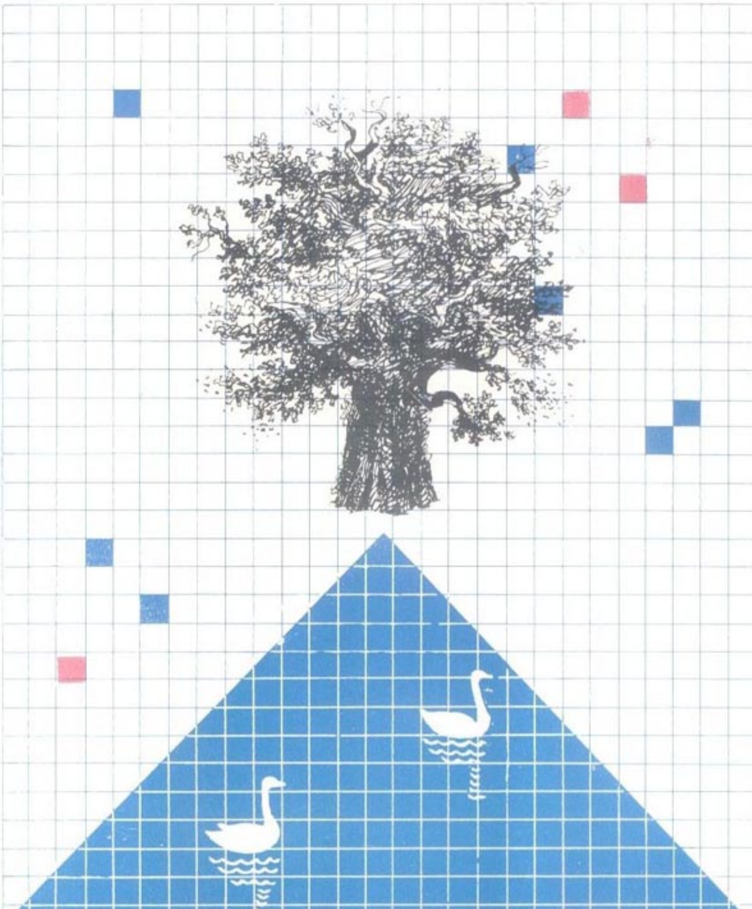
96

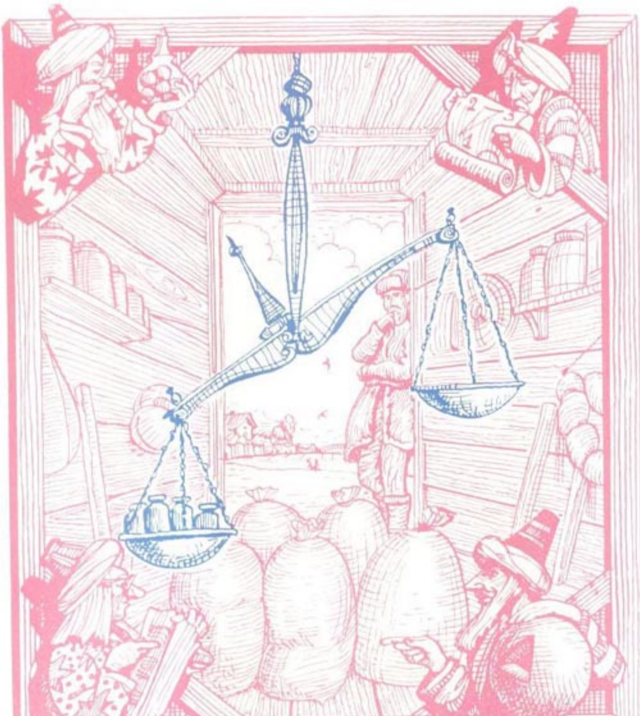
Otros setenta y cinco problemas y experimentos de física

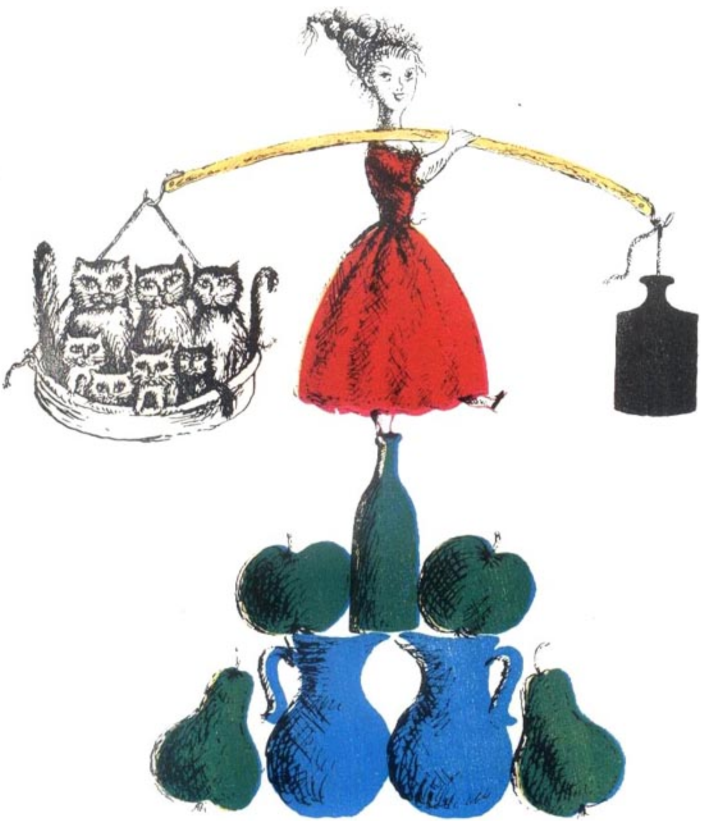
7

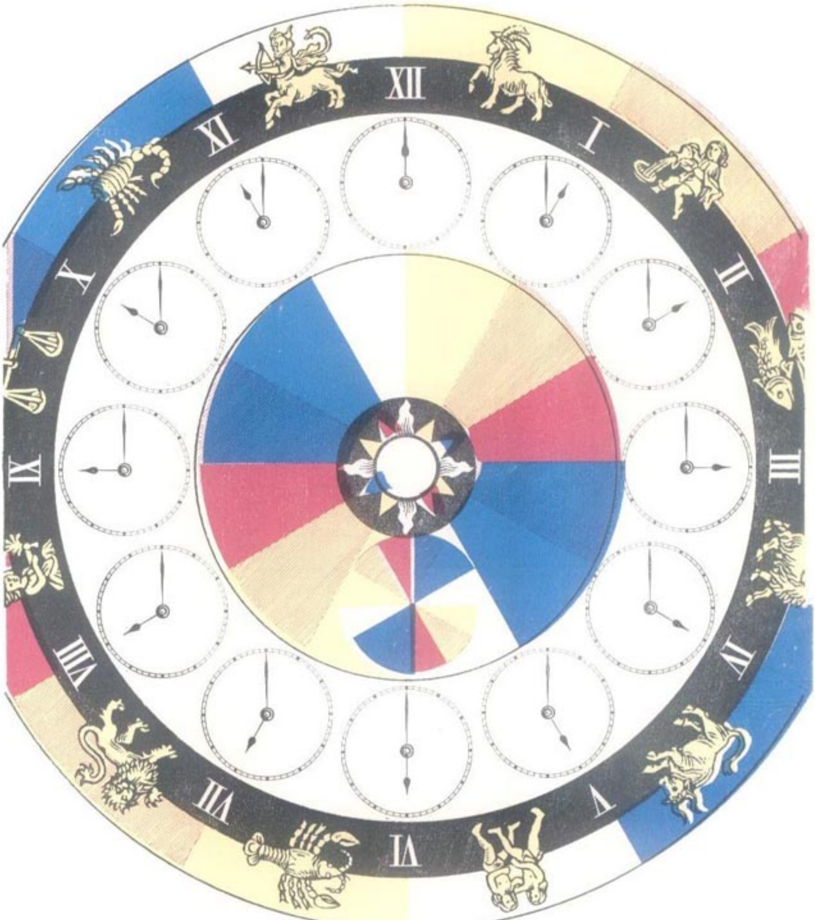
Cortes y cosidos hábiles

197

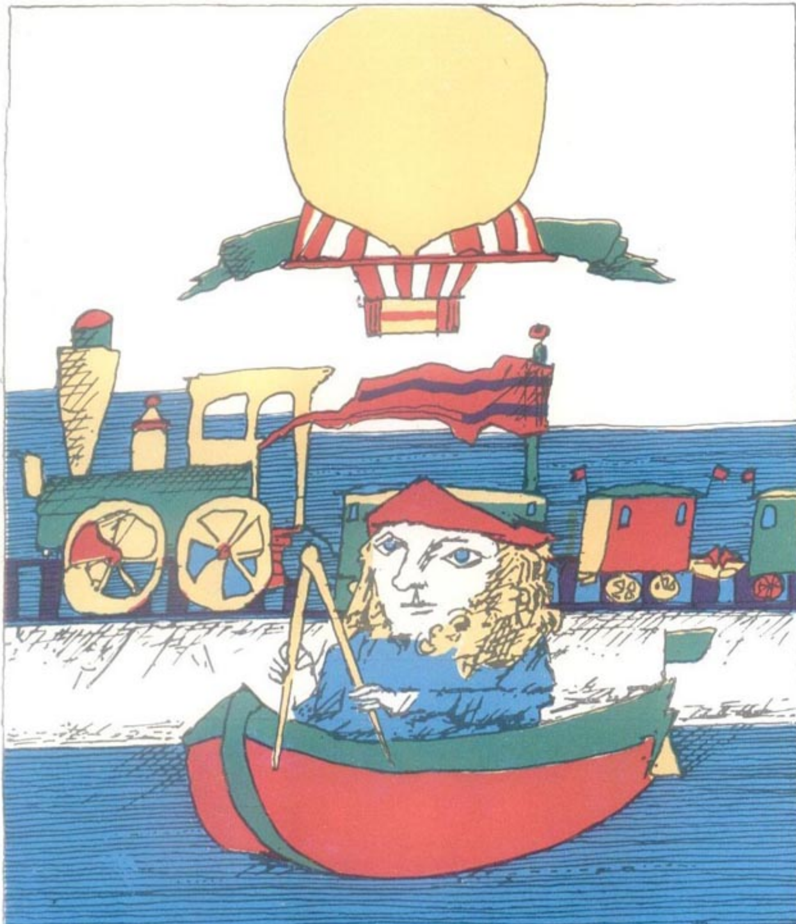


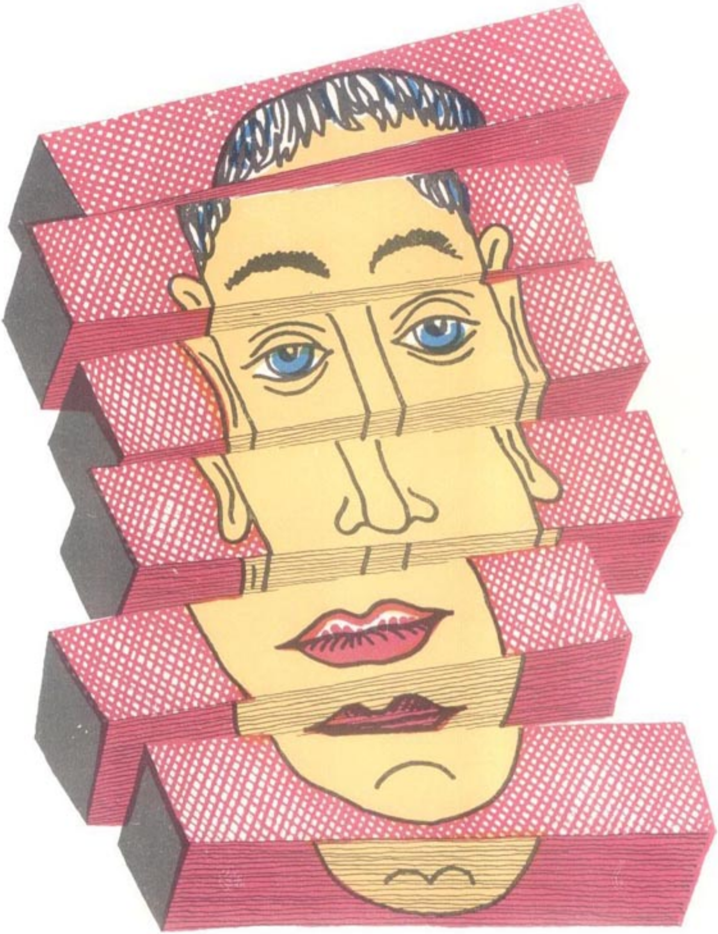


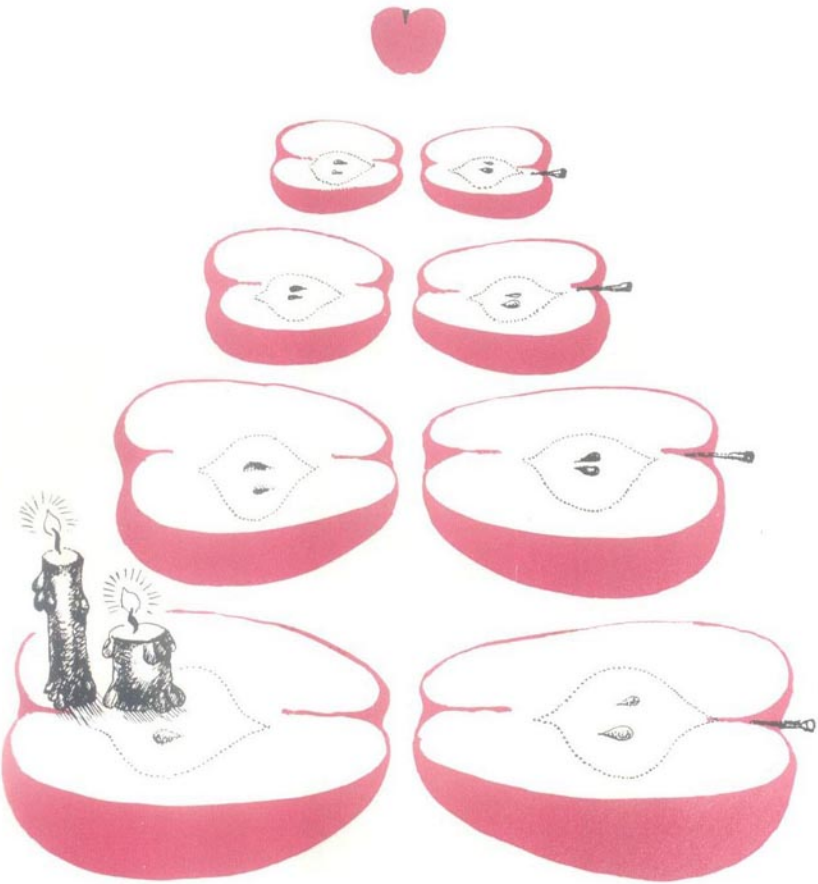


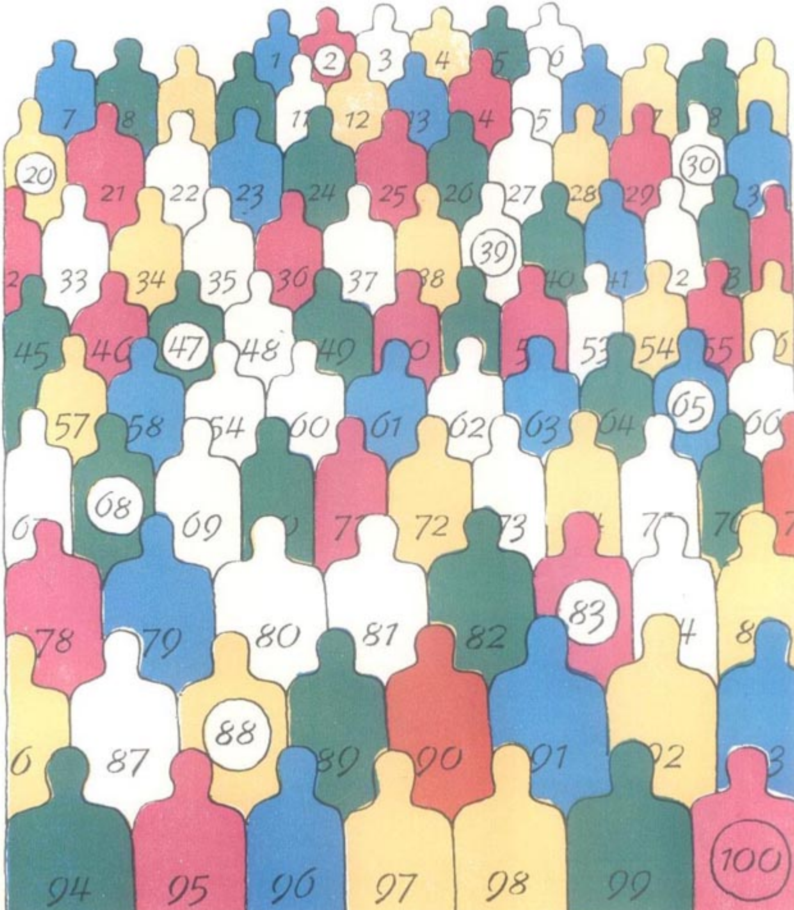

XII
I
II
III
IV
V
VI
VII
VIII
IX
X
XI

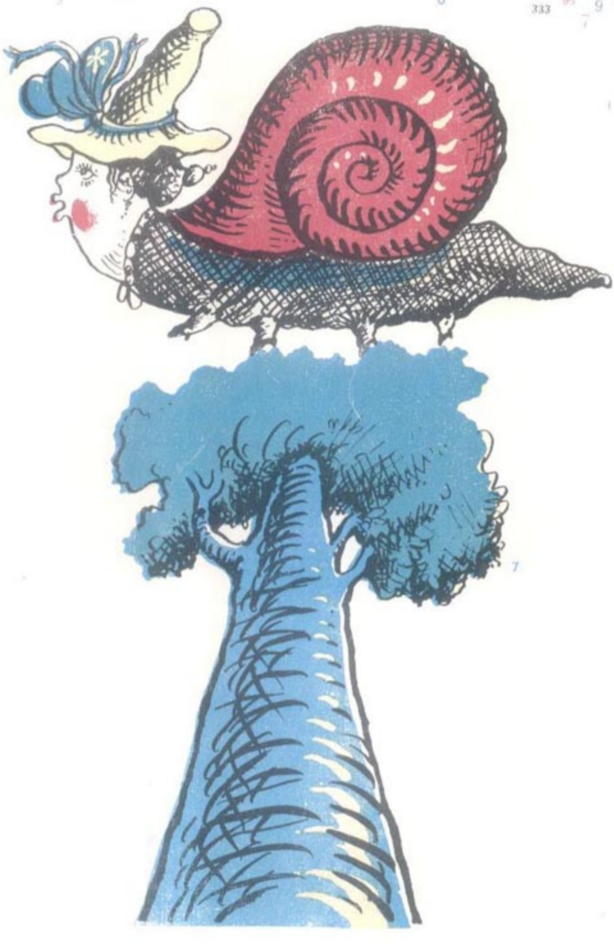
237 Problemas acerca de los medios de transporte

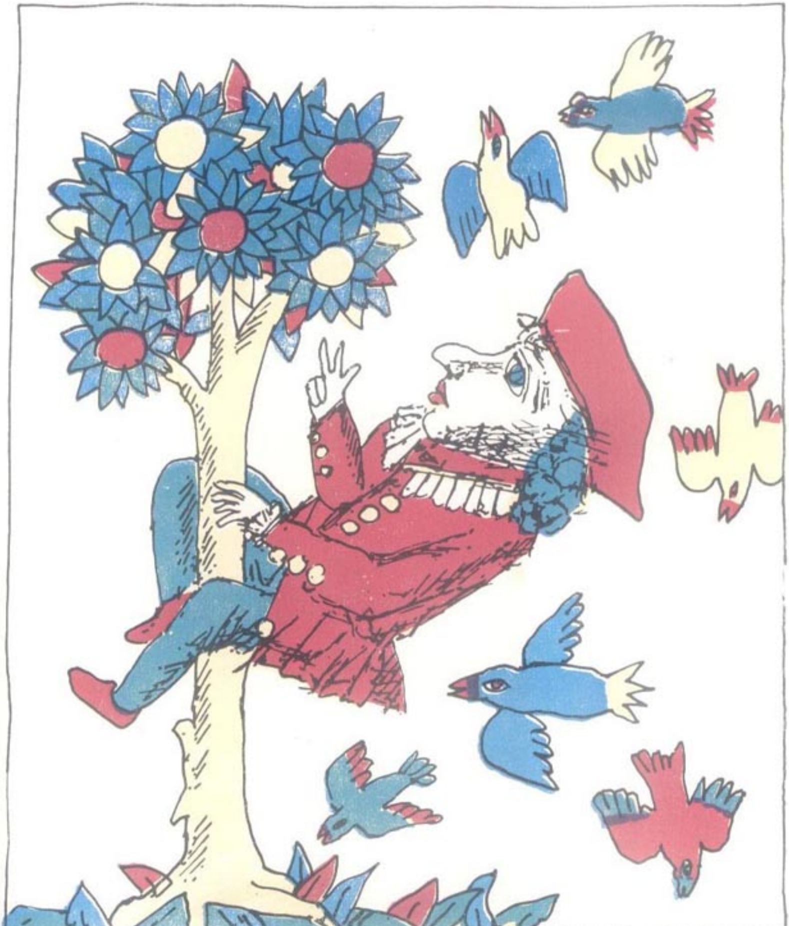


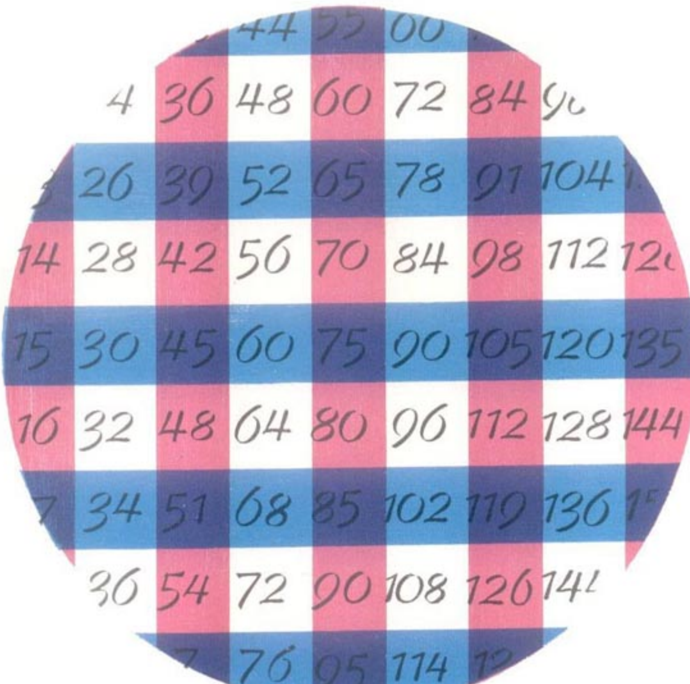


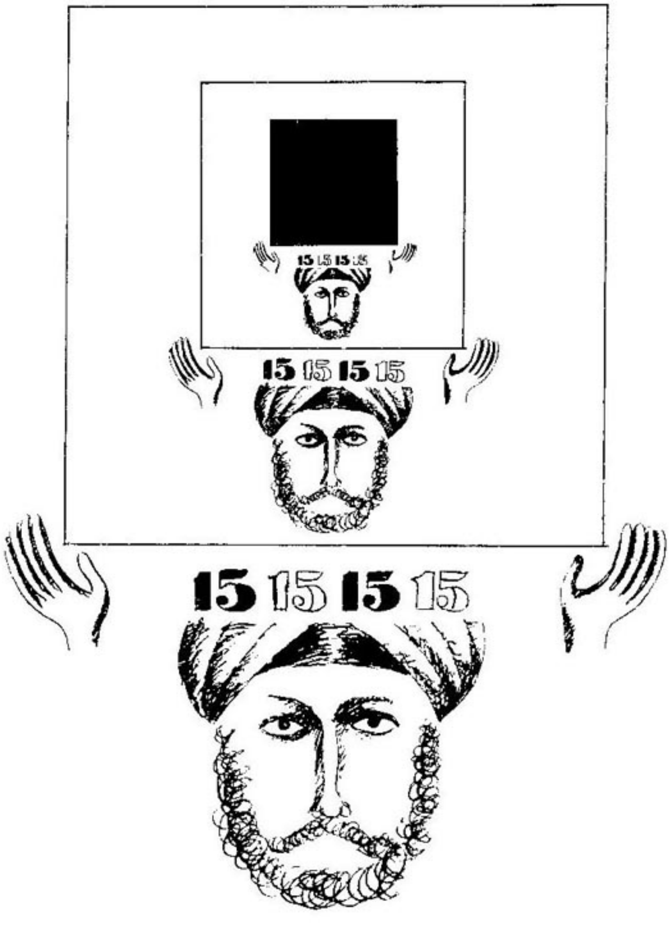


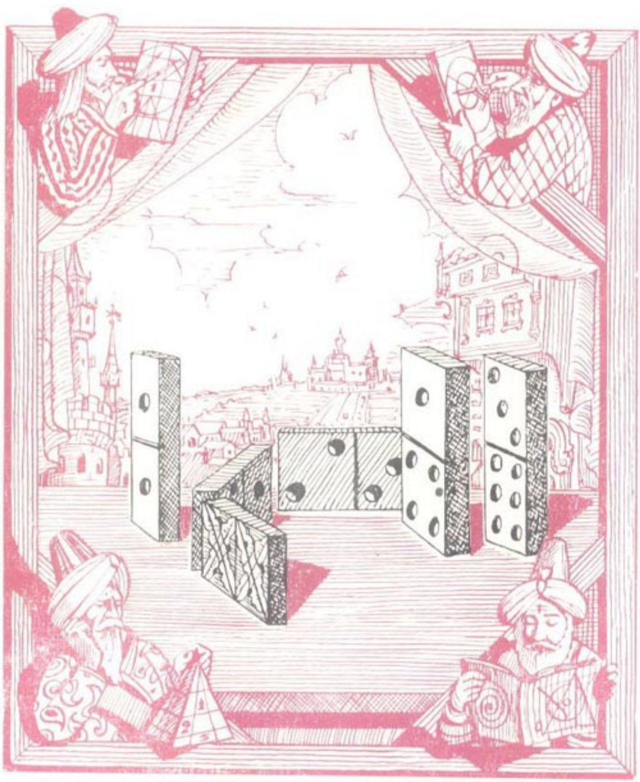

1 2 3 4 5
7 8 11 12 13 4 5
20
21 22 23 24 25 26 27 28 29 30
39
33 34 35 36 37 38 40 41 2
45 46 47 48 49 53 54 55
65
57 58 54 60 61 62 63 64
68
69 72 73
83
78 79 80 81 82
88
87 89 90 91
100
94 95 96 97 98 99

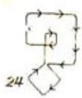


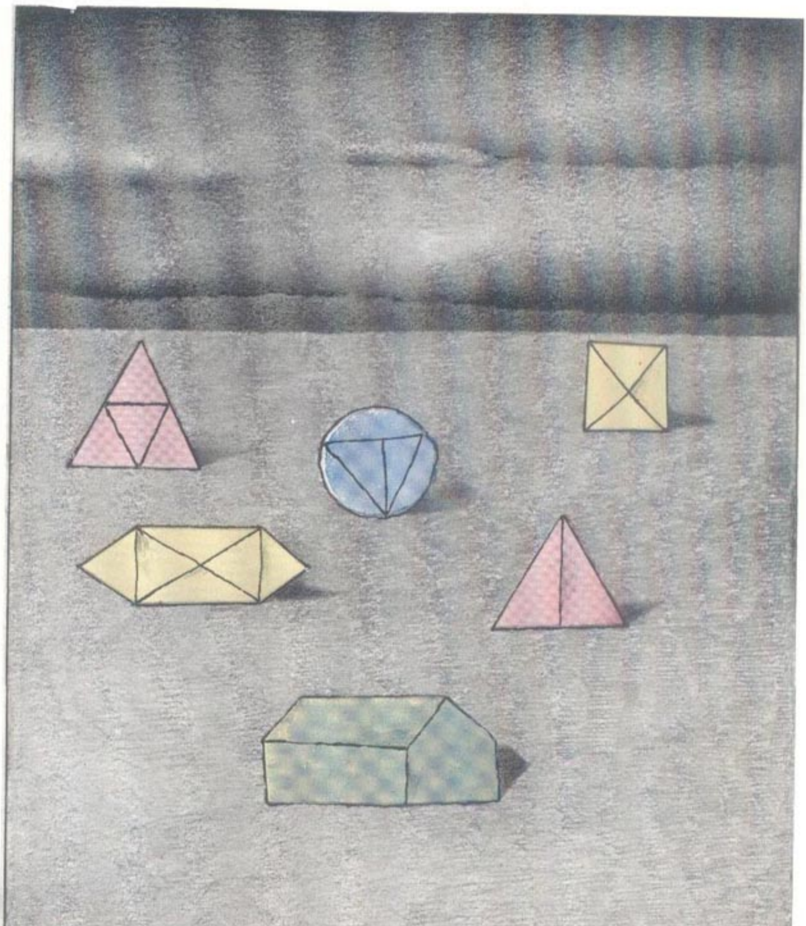



44 55
36 48 60 72 84
26 39 52 65 78 91 104
14 28 42 56 70 84 98 112
15 30 45 60 75 90 105 120 135
16 32 48 64 80 96 112 128 144
34 51 68 85 102 119 136
54 72 90 108 126
76 95 114


15 15 15 15
15 15 15 15
15 15 15 15







Sin regla graduada

Tijeras y papel

De un corte, en tres partes • ¿Cómo poner de canto una tira de papel? • Anillos encantados • Resultados inesperados de un corte • Una cadena de papel • ¿Cómo meterse por una hoja de papel?

Usted pensará, como es natural — lo mismo que yo pensaba hace tiempo —, que en este mundo hay cosas que no sirven. Pero se equivoca: no hay trastos viejos que no sirvan para algo. Lo que no vale para una cosa, vale para otra, y lo que no sirve para nada útil, puede servir para distraerse.

En el rincón de un cuarto recién reparado me encontré una vez con varias tarjetas postales viejas y un montón de tiras estrechas de las que suelen recortarse de los papeles pintados cuando se empapelan las habitaciones. «Esto —pensé yo— no vale más que para quemarlo en la estufa». Pero resultó que hasta estas cosas, tan inútiles al parecer, pueden servir de pasatiempo interesante. Mi hermano mayor me enseñó una serie de ingeniosos rompecabezas que pueden hacerse con este material.

Empezó por las tiras de papel. Me dio una que tendría unos tres palmos de largo y me dijo:

—Coge unas tijeras y corta esta tira en tres partes...

Me disponía ya a cortar, cuando mi hermano me detuvo:

—Espera que aún no he terminado. Córtala en tres partes, pero de un solo tajo.

Esto ya era más difícil. Intenté hacerlo de varias formas y me convencí de que el problema que me había puesto era embarazoso. Al fin llegué a la conclusión de que no se podía resolver.

—¿Qué quieres, reírte de mí? —le dije—. Esto es imposible.

—Piénsalo mejor, quizá comprendas lo que hay que hacer.

—Lo que yo he comprendido ya es que este problema no tiene solución.

—Pues, lo has comprendido mal. Dame.

Mi hermano me quitó la tira y las tijeras, dobló el papel y lo cortó por la mitad. Resultaron tres trozos.

—¿Ves?

—Sí, pero has doblado el papel.

—¿Y por qué no lo doblaste tú?

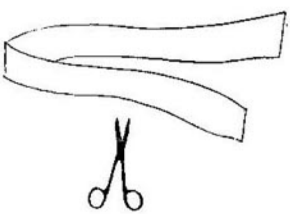


Figura 1

Figura 2

—Porque no me dijiste que se podía doblar.

—Pero tampoco te dije que no se podía. Así que, reconoce que no has sabido resolver el problema.

—Ponme otro. Ya verás como no me coges más.

—Toma esta otra tira. Ponla de canto sobre la mesa.

—¿Para que se quede en pie, o para que se caiga? —le pregunté, imaginándome que se trataba de una nueva trampa.

—Para que se quede en pie, claro está. Si no, no estaría de canto.

«Para que se quede ... de canto» —pensé yo, y de repente se me ocurrió que la tira se podía doblar. La doblé y la puse sobre la mesa.

—Ahí la tienes, ¡de canto! De que no se podía doblar no dijiste nada.

—Está bien.

—¡Venga otro problema!

—Con mucho gusto. ¿Ves?, he pegado los extremos de varias tiras y han resultado unos anillos de papel. Coge un lápiz rojo y azul y traza a todo lo largo de la parte exterior del anillo una raya azul, y a lo largo de la parte interior, una raya roja.

—¿Y qué más?

—Eso es todo.

¡Qué tarea más simple! Y, sin embargo, no me salió bien. Cuando cerré la raya azul y quise empezar la roja, me encontré con que, por descuido, había trazado rayas azules a los dos lados del anillo.

—Dame otro anillo —le dije desconcertado—. Este lo he estropeado sin querer.

Pero con el segundo anillo me ocurrió lo mismo: no me dí cuenta de cómo rayé sus dos partes.

—¿Qué confusión es ésta?, también lo he estropeado. ¡Dame el tercero!

—Cógelo, no te preocupes.

Y, ¿qué piensa usted? Esta vez también resultaron rayados con trazo azul los dos lados del anillo. Para el lápiz rojo no quedó parte libre.

Me apesadumbré.

—¡Una cosa tan fácil y no puedes hacerla! —dijo mi hermano riéndose—. A mí me sale en seguida.

Y, efectivamente, cogió un anillo y trazó rápidamente por su lado exterior una raya azul y por todo el interior, una raya roja.

Recibí un nuevo anillo y empecé, con el mayor cuidado posible, a trazar la raya por una de sus partes.

Por fin, procurando no pasarme al otro lado inopinadamente, cerré el trazo. Y... otra vez fracasé: ¡las dos partes quedaron rayadas! Cuando las lágrimas se me saltaban ya, miré confuso a mi hermano y, sólo entonces, por su sonrisa astuta, comprendí que pasaba algo anormal.

—Eh..., ¿has hecho un truco? —le pregunté.

—Sí. Los anillos están encantados —me respondió—. ¡Son maravillosos!

—¿Maravillosos? Son anillos como otros cualesquiera. Pero tú les haces algo.

—Intenta hacer con ellos alguna otra cosa. Por ejemplo, ¿podrías cortar uno de estos anillos a lo largo, para que salieran dos más estrechos?

—¡Vaya trabajo!

Corté el anillo, y ya me disponía a enseñarle a mi hermano la pareja obtenida, cuando vi con sorpresa que tenía en mis manos no dos anillos, sino uno más largo.

—¿Qué, dónde están tus dos anillos? —me preguntó él con aire de burla.

—Dame otro anillo: probaré otra vez.

—¿Para qué quieres otro? Corta ese mismo que acabas de obtener.

Así lo hice. Y esta vez conseguí, indudablemente, tener dos anillos en mis manos. Pero cuando quise separarlos, resultó que era imposible, ya que estaban enlazados. Mi hermano tenía razón: ¡aquel anillo estaba encantado de verdad!

—El secreto de este encantamiento es bien sencillo —replicó mi hermano—. Tú mismo puedes hacer anillos tan extraordinarios como éstos. Todo consiste en que, antes de pegar los extremos de la tira de papel, hay que volver uno de dichos extremos de esta forma (fig. 3).

—¿Y de esto depende todo?

—Exactamente. Pero yo, como es natural, rayé con el lápiz un anillo ... ordinario. Aún resulta más interesante si el extremo de la tira se vuelve no una, sino dos veces.

Mi hermano confeccionó ante mis ojos un anillo de este último tipo y me lo dio.

—Córtalo a lo largo —me dijo—, a ver que sale.

Lo corté y resultaron dos anillos, pero enlazados el uno al otro. ¡Tenía gracia! No se podían separar.

Yo mismo hice tres anillos más, iguales que éstos, y al cortarlos obtuve tres nuevos pares de anillos inseparables.

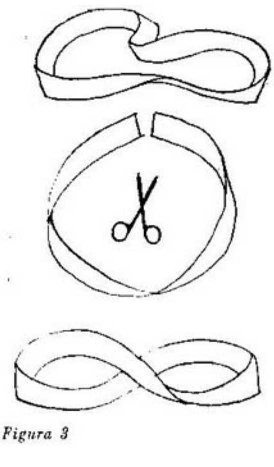


Figura 3

—Y ¿qué harías tú —me preguntó mi hermano— si tuvieras que unir estos cuatro pares de anillos de modo que formaran una larga cadena abierta?

—Eso es fácil: cortaría uno de los anillos de cada par, lo ensartaría y lo volvería a pegar.

—Es decir, ¿cortarías con las tijeras tres anillos? —aclaró mi hermano.

—Tres, claro está —repuse yo.

—Y ¿no es posible cortar menos de tres?

—Si tenemos cuatro pares de anillos, ¿cómo quieres unirlos cortando sólo dos? Eso es imposible —aseguré yo.

En vez de responder, mi hermano cogió las tijeras que yo tenía en la mano, cortó los dos anillos de un mismo par y unió con ellos los tres pares restantes. Resultó una cadena de ocho eslabones. ¡Más fácil

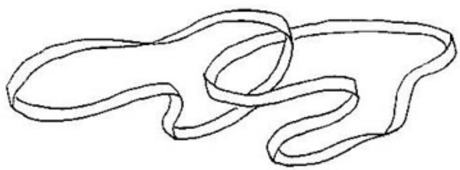


Figura 4

no podía ser! No se trataba de ninguna artimaña. Lo único que me sorprendió es que no se me hubiera ocurrido a mí una idea tan sencilla.

—Bueno, dejemos ya las tiras de papel. Creo que tienes por ahí unas tarjetas postales viejas. Tráelas, vamos a ver que hacemos con ellas. Prueba, por ejemplo, a recortar en una tarjeta el agujero más grande que puedas.

Horadé con las tijeras la tarjeta, y con mucho cuidado, recorté en ella un orificio rectangular, dejando solamente un estrecho marco de cartulina.

—Ya está. ¡Más grande no puede ser! —dije yo satisfecho, mostrándole a mi hermano el resultado de mi trabajo.

Pero él, por lo visto, pensaba de otro modo.

—Pues, es un agujero bastante pequeño. Apenas si pasa por él la mano.

—¿Y tú, qué querías, que se pudiera meter la cabeza por él? —repliqué con ironía.

—La cabeza y el cuerpo. Un agujero por el que se pueda meter uno entero: ese es el agujero que hace falta.

—¡Ja, ja! Un agujero que sea más grande que la propia tarjeta, ¿eso es lo que tú quieres?

—Exactamente. Muchas veces mayor que la tarjeta.

—Aquí no hay astucia que valga. Lo imposible es imposible.

—Pero lo posible es posible —dijo mi hermano y comenzó a cortar.

Aunque yo estaba convencido de que quería reírse de mí, observé con curiosidad lo que hacían sus manos. Dobló la tarjeta postal por la mitad, trazó con un lápiz dos rectas paralelas, próximas a los bordes largos de la tarjeta doblada, e hizo dos cortes junto a los otros dos bordes.

Después cortó el borde doblado, desde el punto A hasta el B, y empezó a dar cortes cercanos unos a otros así:

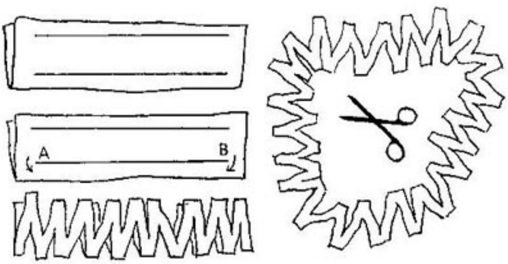


Figura 5

—¡Listo! —anunció mi hermano.

—Pues, yo no veo ningún agujero.

—¡Mira!

Mi hermano extendió la cartulina. Y figúrese usted: ésta se desarrolló formando una cadeneta tan larga, que el hermano me la echó por la cabeza sin dificultad y ella cayó a mis pies rodeándome con sus zigzagues.

—¿Qué, se puede meter uno por ese agujero?

—¡Y dos también, sin apretarse! —exclamé yo admirado.

Mi hermano dio con esto por terminados sus experimentos y rompecabezas y me prometió que en otra ocasión me enseñaría toda una serie de pasatiempos valiéndose exclusivamente de monedas.

Pasatiempos de monedas

Moneda visible e invisible • Un vaso insondable • ¿Adónde fue a parar la moneda? • Problemas de distribución de monedas • ¿En qué mano está la moneda de diez copeikas? • Juego de transposición de monedas • Leyenda hindú • Soluciones de los problemas

—Ayer prometiste enseñarme unos trucos con monedas —le recordé a mi hermano cuando tomábamos el té de desayuno.

—¿Desde por la mañana vamos a empezar con los trucos? Bueno. Vacía este lavafrutas.

En el fondo de la vasija recién vacía puso mi hermano una moneda de plata:

—Mira al lavafrutas sin moverte de tu sitio y sin inclinarte hacia adelante. ¿Ves la moneda?

—Sí, la veo.

Mi hermano alejó un poco la vasija:

—¿Y ahora?

—Veo nada más que el borde de la moneda. Lo demás está oculto.

Alejando un poquitín más la vasija, consiguió mi hermano que yo dejase de ver la moneda, la cual quedó completamente oculta por la pared del lavafrutas.

—Estate tranquilo y no te muevas. Yo echo agua en la vasija. ¿Qué ocurre con la moneda?

—Otra vez la veo totalmente, como si hubiera subido junto con el fondo. ¿A qué se debe esto?

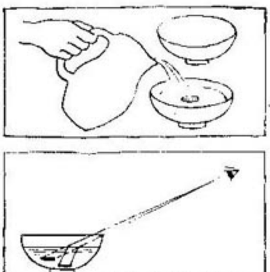


Figura 6

Mi hermano cogió un lápiz y dibujó en un papel el lavafrutas con la moneda. Y entonces todo quedó claro. Mientras la moneda se encontraba en el fondo de la vasija sin agua, ni un solo rayo de luz procedente de aquélla podía llegar a mi ojo, ya que la luz seguía líneas rectas y la pared opaca del lavafrutas se interponía en su camino entre la moneda y el ojo. Cuando echó el agua, la situación cambió: al pasar del agua al aire, los rayos de luz se quiebran (o como dicen los físicos: «se refractan») y salen ya por encima del borde del recipiente, pudiendo llegar al ojo. Pero nosotros estamos acostumbrados a ver las cosas solamente en el lugar de donde parten los rayos *rectos* y, por esto, suponemos inconscientemente que la moneda se encuentra no donde está en realidad, sino más alta, en la prolongación del rayo refractado. Por esto nos parece que el fondo de la vasija se elevó junto con la moneda.

—Te aconsejo que recuerdes este experimento —me dijo mi hermano—. Te servirá cuando te estés bañando. Si te bañas en un sitio poco profundo, donde se vea el fondo, no te olvides de que verás dicho fondo más arriba de donde está en realidad. Bastante más arriba: aproximadamente en toda una cuarta parte de la profundidad total. Donde la profundidad verdadera sea, por ejemplo, de 1 metro, te parecerá que sólo es de 75 centímetros. Por esta causa ya han ocurrido no pocas desgracias con los niños que se bañan: se dejan llevar por la engañosa visión y no calculan bien la profundidad.

—Yo me he dado cuenta de que, cuando vas en barca por un sitio así, donde se ve el fondo, parece que la profundidad mayor se encuentra precisamente debajo de la barca y que alrededor es mucho menor. Pero llegas a otro sitio, y otra vez la profundidad es menor alrededor y mayor debajo de la barca. Da la sensación de que el sitio más profundo se traslada con la barca. ¿Por qué ocurre esto?

—Ahora no te será difícil comprenderlo. Los rayos que salen del agua casi verticalmente, cambian de dirección menos que los demás, por lo que en estos puntos parece que el fondo está menos elevado que en otros, de los cuales llegan a nuestro ojo rayos *oblicuos*. Es natural que, en estas condiciones, el sitio más profundo nos parezca que está precisamente debajo de la barca, aunque el fondo sea llano. Y ahora hagamos otro experimento de un tipo completamente distinto.

Mi hermano llenó un vaso de agua hasta los mismos bordes:

—¿Qué crees que ocurrirá si ahora echo en este vaso una moneda de veinte copeikas?

—Está claro: el agua rebosará.

—Hagamos la prueba.

Con mucho cuidado, procurando no agitar el agua, mi hermano dejó caer una moneda en el vaso lleno. Pero no se derramó ni una sola gota.

—Intentemos ahora echar otra moneda de viente copeikas —dijo mi hermano.

—Entonces es seguro que se derramará —le advertí yo con certeza.

Y me equivoqué: en el vaso lleno cupo también la segunda moneda. A ella siguió una tercera y luego una cuarta.

—¡Este vaso es insondable! —exclamé yo.

Mi hermano, en silencio y sin inmutarse, continuaba echando en el vaso una moneda tras otra. La quinta, sexta y séptima moneda de veinte copeikas cayeron en el fondo del vaso sin que el agua se derramara. Yo no podía creer lo que mis ojos veían. Estaba impaciente por saber el desenlace.

Pero mi hermano no se daba prisa a explicármelo. Dejaba caer con precaución las monedas y no paró hasta la *decimoquinta moneda de veinte copeikas.*

—Por ahora basta —dijo por fin—. Mira como ha subido el agua sobre los bordes del vaso.

Efectivamente: el agua *sobresalía* de la pared del vaso aproximadamente el grueso de una cerilla, redondeándose junto a los bordes como si estuviera en una bolsita transparente.

—En esta «hinchazón» está la clave del secreto —continuó diciendo mi hermano—. Ahí es adonde fue a parar el agua que desplazaron las monedas.

—¿Y 15 monedas han desplazado tan poca agua? —dije yo sorprendido—. El montón de 15 monedas de viente copeikas es bastante alto, mientras que aquí sólo sobresale una capa delgada cuyo espesor apenas si es mayor que el de una de dichas monedas.

—Ten en cuenta no sólo el espesor de la capa, sino también su área. Supongamos que el espesor de la capa de agua no sea mayor que el de una moneda de veinte copeikas. Pero, ¿cuántas veces es mayor su anchura?

Yo calculé que el vaso sería unas cuatro veces más ancho que la moneda de veinte copeikas.

—Cuatro veces más ancho y con el mismo espesor. Quiere decir —resumí yo—, que la capa de agua es solamente cuatro veces mayor que una moneda de veinte copeikas. En el vaso podrían haber cabido cuatro monedas, pero tú has echado ya 15 y, por lo que veo, piensas echar más. ¿De dónde sale el sitio para ellas?

—Es que tú has calculado mal. Si un círculo es cuatro veces más ancho que otro, su área no es cuatro veces mayor, sino 16 veces.

—¿Cómo es eso?

—Tú debías saberlo. ¿Cuántos centímetros cuadrados hay en un metro cuadrado? ¿Cien?

—No: $100 \times 100 = 10\,000$.

—¿Ves? Pues, para los círculos sirve esa misma regla: si la anchura es doble, el área es cuatro veces mayor; si la anchura es triple, el área es nueve veces mayor; si la anchura es cuádruple, el área es 16 veces mayor y así sucesivamente. Por lo tanto, el volumen del agua que sobresale de los bordes del vaso es 16 veces mayor que el volumen de una moneda de veinte copeikas. ¿Comprendes ahora de donde salió el sitio para que las monedas cupieron en el vaso? Y todavía hay más, porque el agua puede llegar a sobresalir de los bordes unas dos veces el espesor de esta moneda.

—¿Será posible que metas en el vaso 20 monedas?

—Y más, siempre que se introduzcan con cuidado y sin mover el agua.

—¡Jamás hubiera creído que en un vaso lleno de agua hasta los bordes pudieran caber tantas monedas!

Pero tuve que creerlo cuando con mis propios ojos vi este montón de monedas dentro del vaso.

—¿Podrías tú —me dijo mi hermano— colocar once monedas en 10 platillos, de modo que en cada platillo no haya más que una moneda?

—¿Los platillos tendrán agua?

—Como quieras. Pueden estar secos —respondió mi hermano, echándose a reír y colocando 10 platillos uno detrás de otro.

—¿Esto también es un experimento físico?

—No, psicológico. Empieza.

—11 monedas en 10 platillos y ... una en cada uno. No, no puedo —dije, y capitulé en el acto.

—Prueba, yo te ayudaré. En el primer platillo pondremos la primera moneda y, temporalmente, la undécima.

Yo coloqué en el primer platillo dos monedas y esperé perplejo el desenlace.

—¿Has puesto las monedas? Está bien. La tercera moneda ponla en el segundo platillo. La cuarta, en el tercero; la quinta, en el cuarto, y así sucesivamente.

Hice lo que me decía. Y cuando la décima moneda la puse en el noveno platillo, vi con sorpresa que aún estaba libre el décimo.

—En él pondremos la undécima moneda que temporalmente dejamos en el primer platillo —dijo mi hermano, y cojiendo del primer platillo la moneda sobrante, la depositó en el décimo.

Ahora había 11 monedas en 10 platillos. Una en cada uno. ¡Era como para volverse loco!

Mi hermano recogió con presteza las monedas y no quiso explicarme lo que pasaba.

—Tú mismo debes adivinarlo. Esto te será más útil e interesante que si conoces las soluciones acabadas.

Y sin atender a mis ruegos, me propuso un nuevo problema:

—Aquí tienes seis monedas. Colócalas en tres filas, de manera que en cada fila haya tres monedas.

—Para eso hacen falta nueve monedas.

—Con nueve monedas cualquiera puede hacerlo. No, hay que conseguirlo con seis.

—¿Otra vez algo inconcebible?

—¡Que pronto te das por vencido! Mira que sencillo es.

Cogió las monedas y las dispuso del modo siguiente:

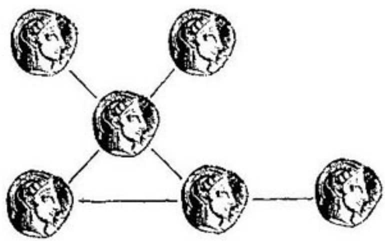


Figura 7

—Aquí hay tres filas y en cada una de ellas hay tres monedas —me explicó.

—Pero estas filas se cruzan.

—¿Y qué? ¿Dijimos acaso que no podían cruzarse?

—Si hubiera sabido que se podía hacer así, lo habría adivinado yo mismo.

—Bueno, pues, adivina cómo se resuelve este mismo problema por otro procedimiento. Pero no ahora, sino después, cuando tengas tiempo libre. Y aquí tienes tres problemas más del mismo tipo. Primero: coloca nueve monedas en 10 filas, a tres monedas en cada fila. Segundo: distribuye 10 monedas en cinco filas, de modo que haya cuatro monedas en cada una. Y el tercero es el siguiente. Yo dibujo un cuadrado con 36 casillas. Hay que poner en él 18 monedas, a una por casilla, de manera que en cada fila longitudinal o transversal haya tres monedas ... Espera, acabo de acordarme de otro truco con monedas. Empuña una moneda de 15 copeikas con una mano y otra de diez con la otra, pero no me enseñes ni me digas qué moneda tienes en cada mano. Yo mismo lo adivinaré. Lo único que tienes que hacer es lo que sigue: duplica mentalmente el valor de la moneda que tienes en la mano derecha, triplica el

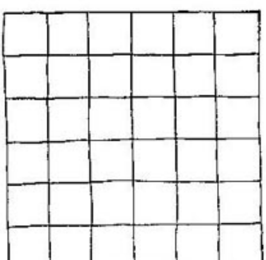


Figura 8

de la que tienes en la izquierda y suma los dos valores así obtenidos. ¿Lo has hecho ya?

—Sí.

—¿El número que resulta, es par o impar?

—Impar.

—La moneda de diez copeikas la tienes en la mano derecha y la de quince, en la izquierda —dijo mi hermano inmediatamente y acertó.

Repetimos el juego. El resultado fue esta vez par, y mi hermano, sin confundirse, dijo que la moneda de diez copeikas estaba en la mano izquierda.

—Acerca de este problema, reflexiona también cuando tengas tiempo —me aconsejó mi hermano—. Y para terminar te enseñaré un interesante juego con monedas.

Puso tres platillos en fila y colocó en el primero un montón de monedas: debajo, una de a rublo, sobre ella, una de cincuenta copeikas, encima, una de veinte, luego, una de quince, y finalmente, una de diez.

—Este montón de cinco monedas debe trasladarse al tercer platillo ateniéndose a las siguientes reglas. Primera regla: las monedas sólo se pueden trasladar una a una. Segunda: se prohibe colocar una moneda mayor sobre otra menor. Tercera: las monedas se pueden poner *provisionalmente* en el segundo platillo, pero cumpliendo las dos reglas anteriores, y al final todas las monedas deben estar en el tercer platillo y en el mismo orden que tenían al principio. Como ves, las reglas no son difíciles de cumplir. Cuando quieras puedes empezar.

Comencé a transponer las monedas. Puse la de diez copeikas en el tercer platillo, la de quince, en el segundo, y me quedé cortado. ¿Dónde poner la de veinte copeikas siendo mayor que la de diez y que la de quince?

Figura 9

—¿Qué te pasa? —intervino mi hermano—. Pon la moneda de diez copeikas en el platillo de en medio, sobre la de quince. Así queda libre el tercer platillo para la moneda de veinte copeikas.

Hice lo que decía, pero me encontré con una nueva dificultad. ¿Dónde colocar la moneda de cincuenta copeikas? Sin embargo, pronto caí en lo que había que hacer: pasé primero la moneda de diez copeikas al primer platillo, la de quince al tercero y luego, la de diez también al tercero. Ahora podía poner la de cincuenta copeikas en el platillo de en medio, que había quedado libre. Después de muchas transposiciones logré trasladar también el rublo y reunir, por fin, todo el montón de monedas en el tercer platillo.

—¿Cuántas transposiciones has hecho en total? —me preguntó mi hermano, aprobando mi trabajo.

—No las he contado.

—Vamos a contarlas. Lo más interesante es saber cuál es el número mínimo de movimientos con que se puede lograr el fin propuesto. Si el montón fuera no de cinco monedas, sino de dos solamente, de la de quince copeikas y de la de diez, por ejemplo, ¿cuántos movimientos habría que hacer?

—Tres: pasar la diez al platillo de en medio, la de quince al tercero y luego la de diez, también al tercero.

—Muy bien. Añadamos ahora otra moneda —la de veinte copeikas— y contemos cuántos movimientos hay que hacer para trasladar el montón formado por estas monedas. Lo haremos así: primero pasaremos sucesivamente las dos monedas menores al platillo de en medio. Para esto, como ya sabemos, hay que hacer tres movimientos. Después pasaremos la moneda de veinte copeikas al tercer platillo, que está libre y será un paso más. Y, por fin, trasladaremos las dos monedas del platillo de en medio al tercer platillo, para lo cual habrá que hacer otros tres movimientos. En total serán $3 + 1 + 3 = 7$ movimientos.

—Déjame que cuente yo mismo los movimientos que hay que hacer para trasladar cuatro monedas. Primero pasaré las tres menores al platillo de en medio, haciendo siete movimientos, después pondré la moneda de cincuenta copeikas en el tercer platillo, y será un movimiento más, y luego volveré a trasladar las 3 monedas menores al tercer platillo, para lo que tendré que hacer otros siete movimientos. En total serán $7 + 1 + 7 = 15$.

—Perfectamente. ¿Y para cinco monedas?

—$15 + 1 + 15 = 31$.

—Ves, ya sabes cómo se hace el cálculo. Pero te voy a enseñar cómo se puede simplificar. Fíjate, todos los números que hemos obtenido, —3, 7, 15, 31— son el producto de 2 por sí mismo, efectuado una o varias veces, pero restándolo una unidad. ¡Observa! —dijo mi hermano y escribió la siguiente tabla:

$$3 = 2 \times 2 - 1,$$
$$7 = 2 \times 2 \times 2 - 1,$$
$$15 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 - 1,$$
$$31 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 - 1.$$

—Entendido: hay que tomar el número dos como factor tantas veces como monedas hay que trasladar, y luego restar una unidad. Ahora podría calcular el número de pasos para cualquier montón de monedas. Por ejemplo, para siete monedas:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 - 1 = 128 - 1 = 127.$$

—Bueno, has comprendido este antiguo juego. Pero debes saber una regla práctica más: si el número de monedas del montón es impar, la primera moneda se pasa al tercer platillo, y si es par, se pasa al platillo de en medio.

—Has dicho que es un juego antiguo. Entonces, ¿no lo has inventado tú?

—No, yo lo único que he hecho es aplicarlo a las monedas. Pero este juego es de procedencia muy antigua y quizá sea de origen hindú. En la India existe una leyenda interesantísima ligada a este juego. En la ciudad de Benarés hay, por lo visto, un templo en el cual el dios hindú Brahma, cuando creó el mundo, puso tres barritas de diamante y ensartó en una de ellas 64 discos de oro: el mayor debajo y cada uno de los siguientes menor que el anterior. Los sacerdotes de este templo tienen la obligación de pasar sin descanso, día y noche, estos discos de una barrita a otra, utilizando la tercera como auxiliar y siguiendo las reglas de nuestro juego, es decir, pasando cada vez un solo disco, sin poner nunca uno mayor sobre otro menor. Dice a leyenda que cuando los 64 discos hayan sido trasladados, se acabará el mundo.

—¡Entonces, ya hace tiempo que no debía existir!

—¿Tú crees que el traslado de los 64 discos no ocupa mucho tiempo?

—Naturalmente. Haciendo un movimiento cada segundo, se pueden hacer 3600 traslados en una hora.

—¿Y qué?

—Y en un día, cerca de 100 mil. En diez días, un millón. Con un millón de pasos creo que se pueden trasladar no 64 discos, sino todo un millar.

—Pues, te equivocas. Para trasladar 64 discos se necesitan aproximadamente 500 mil millones de años.

—¿Cómo es eso? El número de pasos es igual solamente al producto de 64 doses, y esto da ...

—«Nada más» que 18 trillones y pico.

—Espera un poco, ahora hago la multiplicación y veremos.

—Perfectamente. Y mientras tú multiplicas tendré tiempo de ir a hacer algunas cosas —dijo mi hermano y se fue.

Yo hallé primeramente el producto de 16 doses y después este resultado —65 536— lo multipliqué por sí mismo, y con lo que obtuve repetí esta operación. El trabajo era bastante aburrido, pero me armé de paciencia y lo llevé hasta el fin. Me resultó el siguiente numero:

18 446 744 073 709 551 616.

¡Mi hermano tenía razón!

Cobré ánimo y me puse a resolver los problemas que él me había propuesto para que yo los hiciera sin su ayuda. Resultó que no eran difíciles y que algunos incluso eran muy fáciles. Con las 11 monedas en los diez platillos la cosa tenía gracia por su sencillez: en el primer platillo pusimos la primera y la undécima moneda; en el segundo, la *tercera*, después,

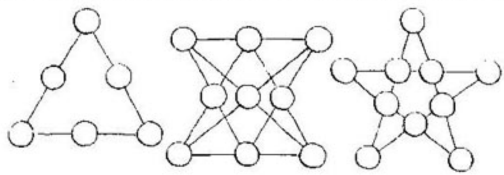


Figura 10

la cuarta y así sucesivamente. Pero, ¿dónde pusimos la *segunda*? ¡En ninguna parte! Ahí está el secreto. También es muy fácil el secreto para adivinar en qué mano está la moneda de diez copeikas: todo se reduce a que la moneda de 15 copeikas, cuando se duplica, da un número par, y cuando se triplica, un número impar; en cambio, la de diez copeikas da siempre un número par; por esto, si de la suma resultaba un número par, quería decir que la de 15 copeikas había sido duplicada, es decir, que estaba en la mano *derecha*, y si la suma era impar, es decir, si la de 15 copeikas había sido triplicada, se hallaba en la mano izquierda. Las soluciones de los problemas referentes a colocaciones de monedas se ven claramente en los dibujos siguientes (fig. 10).

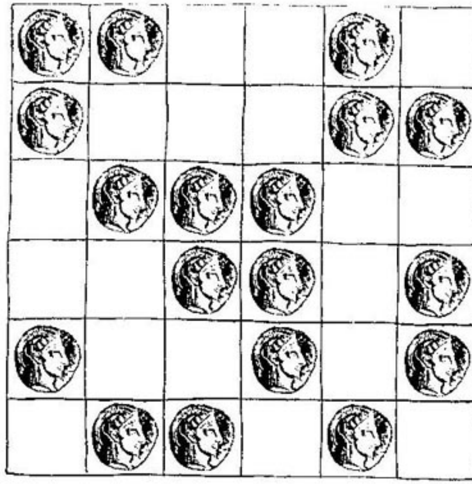


Figura 11

Finalmente, el problema de las monedas y las casillas se resuelve como muestra la fig. 11: las 18 monedas han sido alojadas en el cuadrado de 36 casillas y en cada fila hay tres monedas.

Perdidos en un laberinto

Perdidos en un laberinto • Hombres y ratas • Regla de la mano derecha o de la mano izquierda • Laberintos de la antigüedad • Tournefort en la cueva • Soluciones a los problemas sobre laberintos

—¿De qué te ríes leyendo ese libro? ¿Es alguna historia graciosa? —me preguntó mi hermano.

—Sí. Es el libro de Jerome «Tres en un bote»[1]).

—Lo he leído. Es interesante. ¿En qué pasaje estás?

—En el que cuenta cómo un montón de gente se perdió en el laberinto de un parque y no podía salir de él.

—¡Curioso cuento! Leémelo.

Leí en voz alta el cuento de los que se perdieron en el laberinto.

1) «Three Men in a Boat»

—«Harris me preguntó si había estado alguna vez en el laberinto del Hampton Court. El tuvo ocasión de estar allí una vez. Lo había estudiado en el plano y la estructura del laberinto le pareció que era simple hasta la necedad y que, por lo tanto, no valía la pena pagar por entrar. Pero fue allí con uno de sus parientes.

—Vamos, si quiere —le dijo él—. Pero aquí no hay nada interesante. Es absurdo decir que esto es un laberinto. Se da una serie de vueltas hacia la derecha y ya se está a la salida. Lo recorreremos en diez minutos.

En el laberinto se encontraron con varias personas que paseaban ya por él cerca de una hora y que celebrarían el poder salir. Harris les dijo que, si querían, podían seguirle: él acababa de entrar y sólo quería dar una vuelta. Ellos le respondieron que lo harían con mucho gusto y lo siguieron.

Por el camino se les fue incorporando más gente, hasta que por fin se reunió todo el público que se hallaba en el laberinto. Como habían perdido ya toda esperanza de salir de allí y de poder ver alguna vez a sus familiares y amigos, se alegraban de ver a Harris, se unían a su comitiva y hasta lo bendecían. Según Harris, se juntaron unas veinte personas, entre ellas una mujer con un niño, que llevaba ya toda la mañana en el laberinto y que ahora se aferró a su mano para no perderse por casualidad. Harris torcía siempre hacia la derecha, pero el camino resultó ser muy largo y su pariente le dijo que, por lo visto, el laberinto era muy grande.

—¡Sí, uno de los más grandes de Europa! —le aseguró Harris.

—Me parece —prosiguió el pariente— que ya hemos recorrido dos buenas millas.

Harris empezaba a sentirse preocupado, pero siguió animoso hasta que se toparon con un trozo de galleta que estaba tirada en el suelo. Su pariente juró que había visto aquel trozo de galleta hacía siete minutos.

—¡No puede ser! —replicó Harris. Pero la señora que llevaba al niño aseguró que sí podía ser, porque a ella misma se le había caído aquel trozo antes de encontrarse con Harris. Y después añadió que mejor hubiera sido no encontrarse con él, porque suponía que era un embustero. Esto hizo que Harris se indignara: sacó el plano y explicó su teoría.

—El plano vendría muy bien —le indicó uno de sus compañeros de viaje— si supiéramos dónde nos encontramos.

Harris no lo sabía y dijo que, a su parecer, lo mejor sería volver a la entrada y comenzar de nuevo. La última parte de su proposición no despertó gran entusiasmo, pero la primera —referente a volver a la entrada— fue aceptada por unanimidad y todos le siguieron en su marcha atrás. Al cabo de diez minutos se encontró el grupo en el centro del laberinto.

Harris quiso decir que aquí era adonde él se había dirigido, pero como vio que la gente estaba de mal humor, prefirió aparentar que había llegado allí casualmente.

De todas maneras había que ir a alguna parte. Ahora ya sabían donde estaban y, como es natural, echaron una ojeada al plano. Al parecer no era difícil salir de allí y, por tercera vez, emprendieron la marcha.

Tres minutos más tarde estaban ... de nuevo en el centro del laberinto.

Después de esto ya no había manera de deshacerse de él. Cualquiera que fuera la dirección que tomaran, volvían inevitablemente al centro. Esto se repetía con tal regularidad, que algunos decidieron quedarse allí y esperar a que los demás hicieran su recorrido siguiente y retornaran a donde ellos estaban. Harris sacó el plano, pero, al verlo, la multitud se puso furiosa.

Por fin se desconcertaron y empezaron a llamar al guarda. Este apareció, se subió a una escalera de mano y les gritó hacia donde tenían que ir.

Sin embargo, estaban ya tan atontados, que no consiguieron entender nada. Entonces, el guarda les gritó que no se movieran de donde estaban y que le esperasen. Ellos se apiñaron dispuestos a esperar, y él bajó de la escalera y se dirigió hacia ellos.

El guarda era joven y no tenía experiencia; una vez dentro del laberinto no consiguió encontrarlos, todos sus intentos de llegar a ellos fracasaron, y por fin, él mismo se perdió. De vez en cuando ellos le veían aparecer y desaparecer, ya en un punto ya en otro, al otro lado del seto vivo, y él, al distinguirlos, corría hacia ellos, pero al cabo de un minuto volvía a aparecer en el mismo sitio y les preguntaba dónde se habían metido.

Y no tuvieron más remedio que esperar hasta que vino en su ayuda uno de los guardas antiguos.»

—A pesar de todo —dije yo, después de terminar la lectura—, fueron torpes, porque, teniendo el plano en la mano, no encontrar el camino ...

—Y ¿tú crees que lo encontrarías en seguida?

—¿Por el plano? ¡Cómo no!

—Pues, espera. Yo creo que tengo el plano de ese laberinto —dijo mi hermano y empezó a buscar en su estante.

—Pero, ¿este laberinto existe en realidad?

—¿Hampton Court? Claro que existe. Está cerca de Londres. Hace ya más de doscientos años que lo

Figura 12

hicieron. Aquí está el plano. Resulta que no es tan grande: tiene en total 1000 metros cuadrados.

Mi hermano abrió el libro en que estaba representado el pequeño plano.

—Figúrate que tú estás aquí, en la plazoleta central del laberinto, y que quieres salir fuera. ¿Qué camino tomarías para ello? Sácale punta a una cerilla e indica con ella la ruta a seguir.

Puse la punta de la cerilla en el centro del laberinto y la deslicé resueltamente por los sinuosos pasadizos del plano. Pero la cosa resultó ser más difícil que lo que yo pensaba. Después de dar varias vueltas, me encontré de nuevo en el pradejón central, lo mismo que los héroes de Jerome de que me había reído.

—Lo ves: el plano tampoco ayuda mucho. Pero las ratas resuelven el problema sin necesidad de plano.

—¿Las ratas? ¿Qué ratas?

—Las ratas de que habla este libro. ¿Tú crees que ésta es una obra sobre jardinería? No, es un tratado acerca de las facultades mentales de los animales.

Para comprobar la inteligencia de las ratas, los científicos hacen, de escayola, una especie de laberinto y meten en él a los animales que desean experimentar. Según dice este libro, las ratas encontraban el camino en el laberinto de Hampton Court, de escayola, en media hora, es decir, más de prisa que la gente de que habla Jerome.

—A juzgar por el plano, el laberinto no parece complicado. No piensas que es tan traicionero.

—Existe una regla muy sencilla, conociendo la cual uno entra en un laberinto cualquiera sin temor a no encontrar el camino para volver a salir.

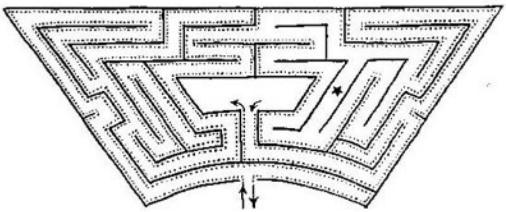


Figura 13

—¿Qué regla es esa?

—Hay que ir por el laberinto pasando por su pared la mano derecha —o la izquierda, es igual—, pero la misma durante todo el tiempo.

—¿Y eso es todo?

—Sí. Puedes probar esta regla en la práctica dándote mentalmente un paseo por el plano.

Yo puse en camino mi cerilla, teniendo en cuenta la regla antedicha, y, en efecto, bien pronto llegué desde la entrada exterior hasta el centro del laberinto y desde aquí hasta la salida al exterior.

—¡Magnífica regla!

—No del todo —repuso mi hermano—. Esta regla es buena para no perderse en el laberinto, pero no sirve para recorrer todos sus caminos sin excepción.

—Sin embargo, yo he pasado ahora por todos los paseos del plano sin omitir ninguno.

—Estás equivocado: si hubieras marcado con una raya punteada el camino recorrido, hubieses descubierto que en uno de los paseos no has estado.

—¿En cuál?

—En este que señalo con una estrellita en el plano (fig. 13). Aquí no has estado. En otros laberintos esta regla te llevará a dejar de lado grandes partes de los mismos, de manera, que aunque saldrás de ellos felizmente, no los verás en su totalidad.

—Pero, ¿existen muchos laberintos diferentes?

—Sí, muchos. Ahora sólo se hacen en jardines y parques: en ellos yerras al aire libre entre altos muros de setos vivos. Pero en la antigüedad hacían laberintos dentro de vastos edificios y en subterráneos. Se hacía esto con el cruel objeto de condenar a los desgraciados que allí metían a errar desesperados por una ingeniosa red de corredores, pasadizos y salas, hasta morir de hambre. Así era, por ejemplo, el laberinto legendario de la isla de Creta, construido, según la tradición, por orden del rey Minos. Sus pasadizos estaban tan embrollados, que su propio constructor, Dédalo, al parecer, no pudo encontrar la salida. El poeta romano Ovidio describe así este edificio:

Al hacer la casa laberinto, con ciegos muros y techo,
Dédalo —genio constructor, célebre entonces—
Erigió un edificio, de peculiaridades exento,
Cuyos largos corredores curvos, formando red,
En sentidos diversos se extendían para burlar
ojos escrutadores.

Y más adelante dice que

...Caminos sin cuento hizo Dédalo en la casa dicha,
Tantos, que difícil le era a él mismo hallar la salida.

Otros laberintos de la antigüedad —prosiguió mi hermano— tenían por objeto guardar las sepulturas de los reyes, protegiéndolos contra los ladrones. El sepulcro se hallaba en el centro del laberinto, de modo que si el avaricioso buscador de tesoros enterrados conseguía llegar hasta ellos, no podía encontrar la salida: la tumba del rey se convertía también en tumba suya.

—Y ¿por qué no aplicaban la regla de que tú me has hablado antes?

—En primer lugar, porque, al parecer, en la antigüedad nadie sabía esa regla. Y, en segundo, porque, como ya te he explicado, no da siempre la posibilidad de recorrer todos los rincones del laberinto. Este puede construirse de manera, que el que utilice esta regla no pase por el sitio del laberinto en que se encuentran los tesoros ocultos.

—¿Y se puede construir un laberinto del que sea imposible salir? Está claro que el que entre en él aplicando tu regla, podrá salir. Pero, ¿y si se mete dentro a alguien y se deja que se pierda?

—Los antiguos pensaban que, cuando los caminos del laberinto estaban suficientemente embrollados, era imposible salir de él. Pero esto no es así. Puede demostrarse con certeza matemática que es imposible construir laberintos de los cuales no se pueda salir. Es más: no sólo se puede hallar la salida de cualquier laberinto, sino también recorrer absolutamente todos sus rincones. Lo único que hace falta es acometer la empresa siguiendo un sistema riguroso y tomando ciertas medidas de seguridad. Hace 200 años, el botánico francés Tournefort se atrevió a visitar, en la isla de Creta, una cueva acerca de la cual existía la tradición de que, debido a sus innumerables pasadizos, era un laberinto sin salida. Cuevas como ésta hay varias en Creta y tal vez fueran ellas las que dieron origen en la antigüedad a la leyenda sobre el laberinto del rey Minos. ¿Qué hizo el botánico francés para no perderse? He aquí lo que acerca de esto cuenta el matemático Lucas, compatriota suyo.

Mi hermano cogió del estante un libro viejo titulado «Distracciones Matemáticas» y leyó en alta voz el siguiente pasaje, que yo copié luego:

«Después de deambular algún tiempo con nuestros compañeros por toda una red de corredores subterráneos, llegamos a una galería larga y ancha que conducía a una amplia sala en la profundidad de laberinto. En media hora —dijo Tournefort— hemos dado 1460 pasos por esta galería, sin desviarnos a la derecha ni a la izquierda ... A ambos lados de ella hay tantos corredores, que si no tomamos las precauciones necesarias nos perderemos inevitablemente; y como teníamos muchísimas ganas de salir de aquel laberinto, nos preocupamos de asegurar el camino de retorno.

En primer lugar, dejamos a uno de nuestros guías a la entrada de la cueva y le ordenamos que, si no regresábamos antes de que fuera de noche, reuniera gente de las aldeas vecinas para acudir en socorro nuestro. En segundo lugar, cada uno de nosotros llevaba una antorcha encendida. En tercero, en todos los recodos que pensábamos serían difíciles de encontrar después, fijábamos en la pared derecha un papel con un número. Y, en cuarto, uno de nuestros guías iba dejando por el lado izquierdo hacecillos de endrina, preparados de antemano, y otro guía rociaba el camino con paja cortada que llevaba en un saco».

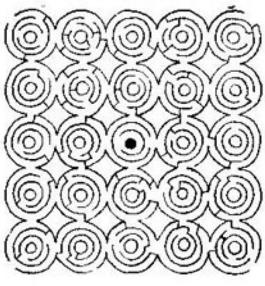


Figura 14

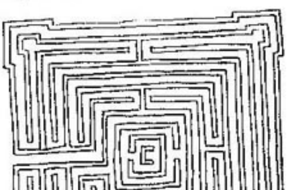


Figura 15

Figura 16

—Todas estas engorrosas precauciones —dijo mi hermano, cuando terminó la lectura del trozo— no son tan necesarias como pueden parecerte. En la época de Tournefort no se podía proceder de otro modo, porque entonces aún no había sido resuelto el problema de los laberintos. Pero ahora ya se han elaborado unas reglas menos embarazosas para explorar los laberintos, y tan seguras como las medidas tomadas por el botánico francés.

—¿Y tú conoces esas reglas?

—Sí. No son difíciles. La primera regla consiste en que, una vez que se entre en el laberinto, se va por cualquier camino hasta que se llega a un corredor sin salida o a una encrucijada. Si se llega a un corredor sin salida, se vuelve atrás y a su entrada se ponen dos piedrecitas, que indicarán que dicho corredor ha sido recorrido dos veces. Si se llega a una encrucijada, se seguirá adelante por cualquiera de los corredores, señalando cada vez con una piedrecita el camino por el cual se llegó y el camino por el que se prosigue. Esta es la primera regla. La segunda dice lo siguiente: si por un nuevo corredor se llega a un cruce en el que ya se estuvo antes (lo que se nota por las piedrecitas), inmediatamente hay que retornar por dicho corredor y poner a su entrada dos piedrecitas. Finalmente, la tercera regla requiere que, si se llega a una encrucijada, ya visitada, por un corredor por el cual ya se ha pasado una vez, hay que señalar este camino con una segunda piedrecita y seguir por uno de los corredores aún no recorridos ninguna vez. Si tal corredor no existe, se opta por uno a cuya entrada sólo haya una piedrecita (es decir, por un corredor recorrido una sola vez). Observando estas reglas pueden recorrerse dos veces, una en un sentido y otra en el opuesto, todos los corredores del laberinto, sin dejar ni un solo rincón, y salir de él felizmente.

Yo tengo varios planos de laberintos que recorté en su tiempo de revistas ilustradas (figs. 14, 15 y 16). Si quieres puedes intentar recorrerlos. Espero que, después de lo que ya sabes, no corras peligro de perderte en ellos. Y si tienes bastante paciencia, puedes hacer en el patio de nuestra casa un laberinto semejante, por ejemplo, al de Hampton Court, del que escribía Jerome. Para ello puedes contar con la ayuda de tus amigos y con la nieve que hay allí.

Con más maña que Colón

«Cristóbal Colón fue un gran hombre —escribía un escolar en uno de sus ejercicios de composición— que descubrió América y puso un huevo de pie». Ambas hazañas le parecían al joven escolar igualmente dignas de admiración. En cambio, el humorista norteamericano Mark Twain no veía nada extraordinario en que Colón hubiera descubierto América: «Lo sorprendente hubiera sido que no la hallara en su sitio».

Y yo pienso que tampoco vale mucho la segunda proeza del insigne navegante. ¿Sabe usted cómo puso Colón el huevo de pie? Simplemente lo chafó contra la mesa, es decir, aplastó la cáscara en su parte inferior. Con esto, como es natural, cambió la forma del huevo. Pero, ¿cómo puede ponerse en pie un huevo, sin cambiar su forma? Este problema no fue resuelto por el intrépido marino.

Sin embargo esto es incomparablemente más fácil que descubrir América e incluso la isla más diminuta. Le enseñaré tres procedimientos de hacerlo: uno, para los huevos duros, otro, para los crudos, y el tercero, para unos y otros.

Para poner de pie un huevo duro no hay más que hacerlo girar con los dedos de una mano o entre las palmas de las dos manos, como si fuera un trompo: el huevo comenzará a girar de pie y conservará esta posición mientras gire. Después de hacer dos o tres pruebas, este experimento se logra realizar con bastante facilidad.

Pero por este procedimiento no se puede poner de pie un huevo crudo: como quizá haya notado usted, los huevos crudos giran mal. En esto consiste precisamente un procedimiento seguro de distinguir, sin romper la cáscara, un huevo cocido de otro crudo. El contenido líquido del huevo crudo no es arrastrado por un movimiento de rotación tan rápido como el de la cáscara y, por esto, parece que lo frena. Hay, pues, que buscar otra manera de poner el huevo de pie. Este procedimiento existe. El huevo se sacude fuertemente varias veces: con esto, la yema rompe su delicada envoltura y se esparce por el interior del huevo. Si después se pone el huevo de pie sobre su extremo romo y se mantiene en esta posición durante cierto tiempo, la yema —que es más pesada que la clara—

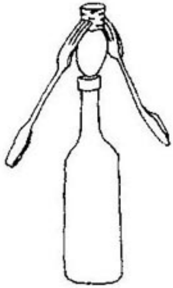


Figura 17

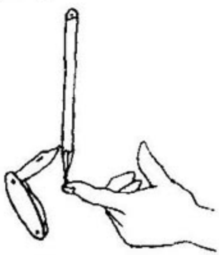


Figura 18

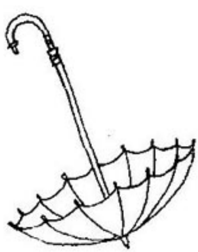


Figura 19

escurre hacia abajo y se reúne en la parte inferior del huevo. En virtud de esto el centro de gravedad del huevo desciende y éste adquiere una estabilidad mayor que la que tenía antes de someterlo a la operación indicada.

Finalmente, hay un tercer procedimiento de poner de pie el huevo. Se pone, por ejemplo, sobre el tapón de una botella tapada, y encima de él se coloca otro tapón con tenedores clavados. Todo este «sistema» (como diría un físico) es bastante estable y conserva el equilibrio incluso si la botella se inclina con precaución. ¿Por qué no se caen el tapón y el huevo? Por la misma razón que no se cae un lápiz colocado verticalmente sobre un dedo, si se le hinca previamente un cortaplumas. «El centro de gravedad del sistema está más bajo que su punto de apoyo» —le explicaría a usted un científico. Esto quiere decir, que el punto a que está aplicado el peso del «sistema» se encuentra más bajo que el punto en que dicho sistema se apoya.

Fuerza centrífuga

Abra una sombrilla, apoye su contera en el suelo, hágala girar y eche al mismo tiempo dentro de ella una pelotita, una bola de papel, un pañuelo o cualquier objeto ligero que no se rompa. Ocurrirá algo inesperado para usted. La sombrilla parece que no quiere admitir su obsequio: la pelotita o la bola de papel empiezan a subir solas hasta el borde de la sombrilla y desde allí salen despedidas siguiendo una línea recta.

La fuerza que en este experimento lanza la pelota suele llamarse «fuerza centrífuga», aunque sería más correcto denominarla «inercia». Esta fuerza la encontramos cada vez que un cuerpo se mueve por un camino circular. Esto no es más que uno de los casos en que se manifiesta la inercia, es decir, la tendencia del objeto que se mueve a conservar la dirección y la velocidad de su movimiento.

Con la fuerza centrífuga nos encontramos con mucha más frecuencia de lo que sospechamos. Si usted hace girar con la mano una piedra atada a una cuerda, notará que la cuerda se tensa y amenaza romperse por la acción de la fuerza centrífuga. Un arma para arrojar piedras tan antigua como la honda, funciona en virtud de esta misma fuerza. La fuerza centrífuga rompe las muelas de los molinos si giran demasiado de prisa y no son suficientemente resistentes. Si se da usted maña, esa misma fuerza le ayudará a hacer el truco con el vaso, del cual no se derramará el agua aunque lo ponga boca abajo: para esto no hay más que subir rápidamente la mano que sostiene el vaso, haciéndola describir rápidamente una circunferencia vertical. La fuerza centrífuga le ayuda al ciclista del circo a describir el vertiginoso «rizo de la muerte». Ella separa la nata de la leche en las desnatadoras; saca la miel de los panales en las centrifugadoras llamadas meloextractores; seca la ropa, extrayéndole el agua en secadoras centrifugadoras, etc.

Cuando un tranvía toma una curva, por ejemplo, cuando tuerce de una calle a otra, los pasajeros sienten directamente la fuerza centrífuga, la cual les empuja en dirección a la pared exterior del vagón. Si la velocidad del movimiento fuera suficiente, todo el vagón podría ser volcado por esta fuerza, si el raíl exterior de la curva no hubiera sido colocado más alto que el interior: a esto se debe que el vagón se incline ligeramente hacia dentro en las curvas. Parece extraño que un vagón que se inclina hacia un costado sea más estable que otro que se mantiene vertical.

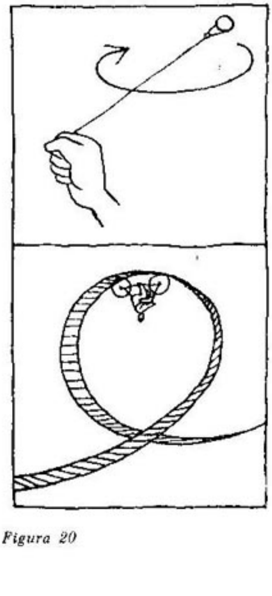


Figura 20

Sin embargo es así. Y un pequeño experimento le ayudará a comprender cómo ocurre esto. Curve una hoja de cartón de manera que tome la forma de una superficie cónica de gran diámetro o, mejor, coja usted, si la hay en casa, una escudilla de pared cónica. También puede servir muy bien para nuestro fin una pantalla cónica de vidrio o de hojalata de las que se usan en las lámparas eléctricas. Una vez que disponga de uno de estos objetos, haga rodar por su interior una moneda, un pequeño disco metálico o un anillo. Describirán círculos por el fondo del recipiente inclinándose sensiblemente hacia dentro. A medida que la moneda o el anillo vayan perdiendo velocidad, las circunferencias que describan serán cada vez menores y se aproximarán al centro del recipiente. Pero bastará girar levemente dicho recipiente, para que la moneda vuelva a rodar con mayor rapidez; y entonces se alejará del centro describiendo cada vez mayores circunferencias. Y si adquiere mucha velocidad, podrá incluso, rodando, salirse del recipiente.

Para las carreras de bicicletas, en los velódromos se hacen pistas circulares especiales, las cuales, como podrá usted comprobar, sobre todo donde las curvas son cerradas, se construyen con una inclinación considerable hacia el centro (peralte). La bicicleta da vueltas por estas pistas manteniéndose en una posición muy inclinada —lo mismo que la moneda en la escudilla— y no sólo no se vuelca, sino que, al contrario, precisamente en esta posición, adquiere una estabilidad extraordinaria. En los circos, los ciclistas llaman la atención del público describiendo circunferencias por un tablado muy empinado. Ahora comprenderá usted que esto no tiene nada de particular. Lo que sí sería un arte difícil para el ciclista es dar vueltas así por una pista *horizontal* lisa. Por esta misma razón se inclinan también hacia dentro, en las curvas cerradas, el jinete y el caballo.

De estos hechos pequeños pasaremos a uno más grande. La esfera terrestre, en que habitamos, es un cuerpo en rotación y en él debe manifestarse la fuerza centrífuga. ¿En qué se manifiesta? En que debido a la rotación de la Tierra todos los cuerpos que hay en la superficie se hacen más livianos. Cuanto más cerca del ecuador, tanto mayor es la circunferencia que tienen tiempo de describir los cuerpos en 24 horas, es decir, giran a mayor velocidad y, por lo tanto, pierden más peso. Si una pesa de 1 kilogramo se traslada desde el polo al ecuador y aquí se vuelve a pesar en una balanza de resorte (dinamómetro), se notará una pérdida de 5 g de peso. Esta diferencia, verdaderamente, no es grande, pero cuanto más pesado sea el cuerpo, mayor será su pérdida de peso. Una locomotora que desde Arkángel llegue a Odesa, resultará ser en esta última 60 kg más ligera, es decir, en lo que pesa una persona adulta. Y un navío de línea de 20 mil toneladas que llegue desde el Mar Blanco al Mar Negro, perderá aquí, nada menos que 80 t. ¡Lo que pesa una buena locomotora!

¿A qué se debe esto? A que la esfera terrestre, al girar, tiende a despedir de su superficie todos los cuerpos, lo mismo que la sombrilla de nuestro experimento despide la pelotita que echamos en ella. La esfera terrestre despediría dichos cuerpos, pero a esto se opone el hecho de que la Tierra atrae hacia sí todos los cuerpos. A esta atracción le damos el nombre de «gravedad». La rotación no puede hacer que los cuerpos salgan despedidos de la Tierra, pero sí pueden disminuir su peso. He aquí por qué los cuerpos se hacen más livianos en virtud de la rotación de la esfera terrestre.

Cuanto más rápida sea la rotación, tanto más perceptible deberá hacerse la disminución del peso. Los científicos han calculado que si la Tierra girara no como ahora, sino 17 veces más de prisa, los cuerpos perderían totalmente su peso en el ecuador: se harían ingrávidos. Y si la Tierra girara con mayor rapidez aún, por ejemplo, si diera una vuelta completa en 1 hora, los cuerpos perderían por completo su peso no sólo en el mismo ecuador, sino también en todos los países y mares próximos al mismo.

Figúrese usted lo que esto significaría: *¡los cuerpos perderían su peso!* Esto quiere decir que no habría cuerpo que usted no pudiera levantar: locomotoras, peñascos, cañones gigantescos, barcos de guerra enteritos, con todas sus máquinas y armamento podrían ser levantados por usted como si fueran plumas. Y si los dejara caer usted, no habría peligro: no aplastarían a nadie. Y no lo aplastarían por la sencilla razón de que no caerían, puesto que no pesarían nada. Permanecerían flotando en el aire en el mismo sitio en que los soltaran. Si usted se encontrara en la barquilla de un globo y quisiera tirar sus bártulos por la borda, éstos no caerían a ninguna parte, sino que permanecerían en el aire. ¡Qué mundo tan maravilloso sería éste! Podríamos saltar tan alto como nunca hallamos saltado ni en sueños: más alto que los edificios y las montañas más altas. Pero no lo olvide: saltar sería muy fácil, pero volver a caer, imposible. Exento de peso, de por sí, no caería usted a tierra.

Este mundo tendría otras incomodidades. Imagíneselas usted mismo: todas las cosas, tanto pequeñas como grandes, si no estuvieran sujetas, saldrían volando en cuanto soplara la más leve brisa. La gente, los animales, los automóviles, los carros, los barcos, todo se movería desordenadamente en el aire, rompiéndose, estropeándose y mutilándose entre sí.

Eso es lo que ocurriría si la Tierra girara mucho más de prisa.

Diez perinolas

En los dibujos que le ofrecemos puede ver usted toda clase de perinolas, hechas de 10 modos distintos. Con ellas podría hacer toda una serie de experimentos divertidos e instructivos. Su fabricación no requiere un arte especial: usted mismo puede hacerlas sin que nadie le ayude y sin gastar nada.

Veamos cómo son estas perinolas.

1. Si cae en sus manos un botón con agujero central, como el representado en la fig. 21, no hay nada más fácil que transformarlo en una peonza. Haga

Figura 21

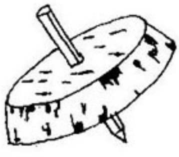


Figura 22

Figura 23

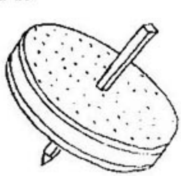


Figura 24

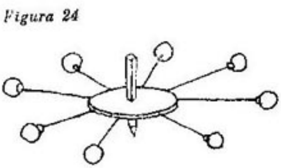


Figura 25

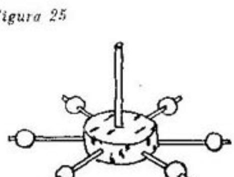


Figura 26

pasar por el agujero de en medio —único que nos hace falta— una cerilla de palo, que entre bien ajustada y que tenga un extremo afilado, y la peonza ya está hecha. Dará vueltas no sólo sobre el extremo afilado de su eje, sino también sobre el romo: para esto no hay más que hacerla girar como de ordinario se hace, sujetando su eje entre los dedos y dejándola caer después con destreza sobre el extremo romo: la peonza girará sobre él balanceándose graciosamente de un lado a otro.

2. Podemos arreglárnoslas también sin botón con agujero en medio. Un tapón siempre se encuentra a mano. Corte usted una rodaja de él, atraviese su centro con una cerilla de palo y tendrá la perinola número 2 (fig. 22).

3. En la fig. 23 ve usted una peonza poco corriente; una nuez que gira sobre un saliente agudo. Para convertir una nuez apropiada en peonza, basta clavar en ella, por su parte achatada, una cerilla de palo y después hacerla girar.

4. Todavía será mejor si consigue un tapón plano ancho (o la tapadera de plástico de un frasco no muy grande). Caldee usted entonces un alambre de hierro o una aguja de hacer punto y queme con ella el tapón, a lo largo de su eje, de manera que quede un agujerito para la cerilla. Esta peonza bailará durante mucho tiempo con estabilidad.

5. Una perinola especial se muestra en la figura siguiente: una cajita redonda, de píldoras, atravesada por una cerilla afilada. Para que la cajita se mantenga firmemente en el eje, sin deslizarse a lo largo de él, hay que lacrar el orificio (fig. 24).

6. Una peonza muy interesante es la que ve usted en la fig. 25. A la periferia de su disco de cartón van atados con hilos unos botoncitos esféricos con ojos. Cuando la peonza gira, los botoncitos son lanzados a lo largo de los radios del disco, tensan los hilos y ponen de manifiesto claramente la acción de la fuerza centrífuga que ya conocemos.

7. Esto mismo, pero de otro modo, lo muestra la perinola de la fig. 26. En el disco de corcho de la peonza van hincados unos alfileres, en los cuales hay ensartadas cuentas multicolores que pueden deslizarse libremente por ellos. Cuando la peonza gira, las cuentas son empujadas por la fuerza centrífuga hacia las cabezas de los alfileres. Si la peonza en rotación está bien iluminada, las varillas de los alfi-

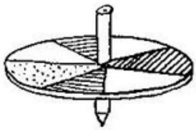


Figura 27

leres se confunden y forman una cinta plateada continua bordeada por la abigarrada circunferencia que originan las cuentas. Para poder contemplar durante más tiempo el efecto que produce esta peonza, conviene hacerla bailar en un plato llano.

8. La peonza de la fig. 27 es de colores. Su fabricación es laboriosa, pero ella compensa el trabajo realizado poniendo de manifiesto propiedades admirables. De un trozo de cartón corte usted un círculo liso, traspáselo, con una aguja de hacer punto, en el centro y póngale una cerilla de palo afilada, apretándolo, para mayor solidez, entre dos círculos de corcho. Ahora divida el disco de cartón en partes iguales por medio de líneas rectas que vayan desde el centro a la periferia, lo mismo que cuando se corta una tarta redonda; las partes obtenidas —que un matemático llamaría «sectores»— píntelas alternativamente de amarillo y azul. ¿Qué verá usted cuando empiece a girar la peonza? El disco no parecerá azul ni amarillo, sino verde. Los colores azul y amarillo, al confundirse en nuestro ojo, dan un color nuevo, el verde.

Continúe sus experiencias acerca de la mezcla de colores. Prepare un disco cuyos sectores estén pintados alternativamente de color celeste y anaranjado. Esta vez el disco, cuando gire, será blanco (o mejor dicho, gris claro, tanto más claro cuanto más puras sean sus pinturas). Dos colores que al mezclarse dan el blanco, se llaman en física «complementarios». Nuestra peonza nos ha demostrado, pues, que el celeste y el anaranjado son dos colores complementarios.

Si su colección de colores es buena, puede usted atreverse a repetir el experimento que hace 200 años hizo el eminente científico inglés Newton. Concretamente: pinte los sectores del disco con los siete colores del iris: violeta, azul, celeste, verde, amarillo, anaranjado y rojo. Cuando el disco gire, estos siete colores deben confundirse dando un color blanco grisáceo. Este experimento le ayudará a comprender que cada rayo de luz solar blanca se compone de muchos rayos de color.

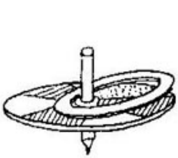


Figura 28

Una variante de nuestros experimentos con la peonza de colores consiste en lo siguiente: cuando la peonza esté ya bailando, eche sobre ella un anillo de papel; el color de este último cambiará inmediatamente (fig. 28).

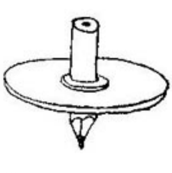


Figura 29

9. Peonza registradora (fig. 29). Haga usted una peonza como acabamos de decir, pero póngale como

eje no una cerilla afilada o un palito, sino un lápiz blando con punta. Haga que esta peonza baile sobre una hoja de cartón un poco inclinada. La peonza, al girar, irá bajando poco a poco por el cartón y dibujando con el lápiz una serie de rizos. Estos rizos serán fáciles de contar, y como cada uno de ellos se forma al dar una vuelta completa la peonza, observando su rotación con un reloj en mano no será difícil determinar cuántas vueltas da la peonza cada segundo[1]). A simple vista sería imposible contarlas.

A continuación se representa otro tipo de peonza registradora. Para hacerla hay que conseguir un disco de plomo, de esos que se ponen en los bordes de las cortinas para que queden tirantes. En el centro del disco hay que horadar un orificio (el plomo es blando y perforarlo no es difícil) y a ambos lados de éste practicar dos agujeritos (uno a cada lado).

El disco se ensarta por el orificio central en un palito afilado, a través de uno de los agujeritos se hace pasar un trozo de sedal de kaprón (fibra sintética) o de cerda, de manera que salgan por abajo un poquito más que el eje de la peonza; el sedal se fija en esta posición con una astillita de palo de una cerilla. El tercer agujerito se deja sin emplear; lo horadamos para que el disco de plomo pese exactamente lo mismo por ambos lados de su eje, de lo contrario la peonza estaría cargada irregularmente y no bailaría con suavidad.

Ya está hecha la peonza registradora; pero para hacer los experimentos con ella hay que preparar un plato ahumado. Después de mantener el fondo del plato sobre la llama de una astilla ardiendo, o de una vela encendida, hasta que su superficie se cubra de una capa uniforme de hollín espeso, se echa a bailar la peonza por esta superficie. Al girar, la peonza se deslizará por ella y el extremo del sedal trazará al mismo tiempo, en blanco sobre negro, un dibujo complicado pero bastante bonito (fig. 30).

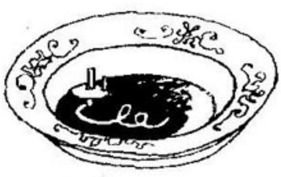


Figura 30

10. La cumbre de nuestros esfuerzos será la última perinola, una peonza carrusel. El hacerla es mucho más

---

[1]) Los segundos pueden contarse también sin reloj, determinándolos por medio del cálculo mental. Para esto hay que aprender de antemano a pronunciar las palabras «uno», «dos», «y tres», «y cuatro», «y cinco» ... de manera que en nombrar cada número se invierta exactamente 1 segundo.
No crea que esto es un arte tan difícil: para aprenderlo harán falta unos diez minutos de entrenamiento, no más.

fácil de lo que parece a primera vista. El disco y la varilla que hace de eje son en este caso lo mismo que en la peonza de colores que ya conocemos. En el disco se hincan alfileres con gallardetes distribuyéndolos simétricamente alrededor del eje. Después se pegan en el disco unos diminutos caballitos de papel, con

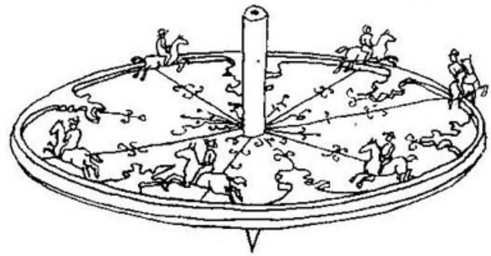


Figura 31

sus jinetes respectivos, y ya tiene usted un pequeño carrusel para distraer a su hermanito o hermanita menor (fig. 31).

Choque

Si se produce una colisión entre dos barcas, dos tranvías o dos bolas de croquet, sea esto un accidente o simplemente el desenlace de una jugada ordinaria, el físico denomina este hecho con la palabra «choque». El choque dura un brevísimo instante; pero si los cuerpos que chocan son, como suele ocurrir de ordinario, elásticos, en este instante tienen tiempo de ocurrir muchas cosas. En cada choque elástico distingue el físico tres períodos. En el primer período del choque los dos cuerpos que intervienen en la colisión comprimen el uno al otro en el punto en que entran en contacto. Entonces comienza el segundo período, en el cual la compresión mutua alcanza su más alto grado; la reacción interna, que se produce en respuesta a la compresión, dificulta la continuación de esta última, ya que equilibra a la fuerza que presiona. En el tercer período del choque, la fuerza de reacción, al tender a restablecer la forma del cuerpo modificada durante el primer periódo, empuja a los cuerpos en sentidos opuestos: el objeto que chocó parece que recibe su golpe de vuelta. Y observamos, en efecto, que si, por ejemplo, una bola de croquet choca contra otra que esté en reposo y que pese lo mismo que ella, debido al contragolpe, la bola que choca se para en el sitio y la que estaba en reposo empieza a rodar con la velocidad que traía la primera.

Es muy interesante observar lo que ocurre cuando una bola choca con una cadena de bolas en contacto mutuo que forman una fila recta. El golpe que recibe la bola que está en el extremo parece que pasa por la cadena, pero todas las bolas permanecen inmómiles

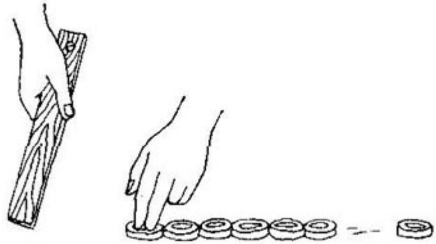


Figura 32

en sus puestos y sólo la última, es decir, la más alejada del lugar del choque, sale despedida hacia un lado, ya que ella no tiene a quien transmitir el golpe y de quién recibirlo de vuelta.

Este experimento puede hacerse con bolas de croquet, pero también se consigue realizarlo con fichas del juego de damas o con monedas. Ponga las fichas formando una fila recta. La fila puede ser muy larga, pero las fichas deben estar necesariamente en apretado contacto unas con otras. Sujete con un dedo la ficha del extremo y déle un golpe a su canto con una regla de madera: verá usted cómo del otro extremo sale disparada la última ficha, mientras las intermedias continúan es sus puestos.

El huevo en el vaso

Los payasos de circo maravillan al público en ciertas ocasiones tirando bruscamente del mantel que cubre una mesa servida, pero toda la vajilla —platos, vasos, botellas, etc.— permanece indemne en su sitio. Aquí no hay trampa ni maravilla, esto es cuestión de habilidad, que se adquiere a fuerza de entrenarse mucho.

Esta agilidad de manos no es probable que la consiga usted. Pero hacer un experimento semejante en pequeña escala no será difícil. Prepare usted en la mesa un vaso lleno de agua hasta la mitad y una tarjeta postal (o mejor aún, media tarjeta); pídale a sus mayores un anillo gande (de hombre), para hacer un experimento, y consiga un huevo duro. Coloque estos objetos así: el vaso con el agua tápelo con la tarjeta; sobre ésta, ponga el anillo, y encima de él coloque de pie el huevo. ¿Puede quitarse la tarjeta sin que el huevo caiga sobre la mesa?

A primera vista esto es tan difícil como tirar del mantel sin que caiga al suelo la vajilla que hay sobre él. Pero usted puede resolver esta delicada cuestión dándole un buen papirotazo al borde de la tarjeta. Esta se desplazará de su sitio y saldrá lanzada hacia el extremo opuesto de la habitación, y el huevo ... el huevo y el anillo irán a parar indemnes al vaso con el agua. El agua amortiguará el golpe e impedirá que se rompa la cáscara del huevo.

Una vez adquirida cierta habilidad, puede arriesgarse a hacer este experimento con un huevo crudo.

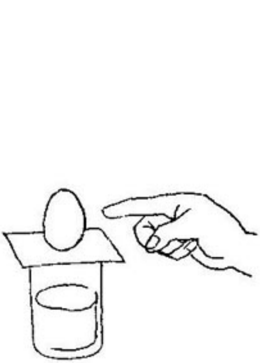


Figura 33

La explicación de esta pequeña maravilla consiste en que, debido a la corta duración del golpe, el huevo no tiene tiempo de recibir de la tarjeta expulsada una velocidad algo apreciable; mientras tanto, la propia tarjeta, que recibe el golpe directamente, tiene tiempo de deslizarse. El huevo, al quedarse sin apoyo, cae verticalmente dentro del vaso.

Si este experimento no le sale bien la primera vez, adiéstrese previamente haciendo otra experiencia más sencilla del mismo tipo. Deposite sobre la palma de su mano izquierda una tarjeta postal (o mejor, media tarjeta) y ponga encima de ella una moneda lo más pesada posible. Después déle un papirotazo al borde de la tarjeta y expúlsela de debajo dela moneda: la cartulina se deslizará, pero la moneda quedará en su mano. El experimento resulta mejor aún si en vez de la tarjeta postal se utiliza un billete de ferrocarril.

Una rotura extraordinaria

Los ilusionistas hacen con frecuencia en escena un bonito experimento que parece extraordinario, aunque se explica con bastante facilidad. Un palo bastante largo se cuelga de dos anillos de papel; en los anillos se apoyan los extremos del palo. Uno de los anillos pende a su vez apoyándose en el filo de una navaja de afeitar, y el otro, está colgado de una gran pipa de fumar. El ilusionista coge otro palo, lo bolea, y le da con él un golpe al primero. ¿Y qué ocurre? ¡Se rompe el palo, y los anillos de papel y la pipa se conservan absolutamente indemnes!

La explicación de este experimento es la misma que la del precedente. El golpe es tan rápido y la acción tan poco duradera, que ni los anillos de papel ni los extremos del palo golpeado tienen tiempo de recibir desplazamiento alguno. Se mueve únicamente la parte del palo que recibe directamente el golpe, y por esto se rompe dicho palo. Por consiguiente, el secreto del éxito está en que el golpe sea muy *rápido* y *seco*. Un golpe lento y flojo no romperá el palo, sino los anillos de papel.

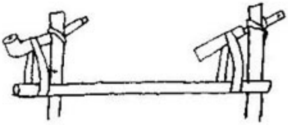


Figura 34

Entre los malabaristas hay algunos tan diestros, que se las ingenian para romper un palo apoyado en los bordes de dos vasos finos, y el vidrio queda intacto.

Digo esto como es natural, no para recomendar que se hagan semejantes trucos. Usted tendrá que conformarse con otras variantes más modestas de

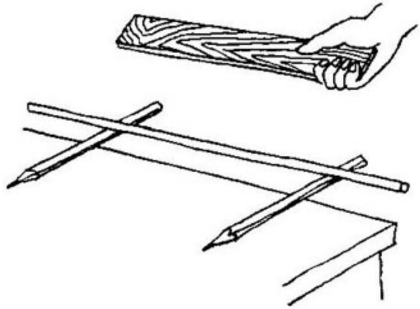


Figura 35

estos experimentos. Ponga sobre el borde de una mesa baja o de un banquillo dos lápices, de manera que una parte de ellos sobresalga libremente, y encima de estos extremos libres ponga un palito delgado y largo. Un golpe fuerte y rápido, dado con el canto de una regla en el centro del palo antedicho, lo romperá por la mitad, pero los lápices en que se apoyaban sus extremos continuarán donde estaban.

Después de esto comprenderá usted por qué es imposible cascar una nuez presionándola suavemente, aunque sea con fuerza, con la palma de la mano, mientras que es muy fácil romperla dándole un golpe fuerte con el puño; en este último caso el golpe no tiene tiempo de propagarse por la parte carnosa del puño, y nuestros blandos músculos no ceden a la presión de la nuez y actúan sobre ella como si fueran un cuerpo rígido.

Por esta misma razón una bala hace en la ventana un agujero pequeño y redondo, mientras que una china tirada con la mano, cuyo vuelo es mucho menos rápido, hace astillas todo el vidrio. Un empujón aún más lento puede hacer que la hoja de la ventana gire sobre sus goznes; ni la bala ni la china pueden hacer esto.

Finalmente, otro ejemplo de este mismo efecto es el corte de un tallo por un golpe dado con una varilla. Presionando lentamente con la varilla, aunque sea con mucha fuerza, no conseguirá usted cortar el tallo, sino únicamente desviarlo hacia un lado. Pero si le da un golpe con impulso, lo cortará con toda seguridad, siempre que el tallo no sea demasiado grueso. Aquí también, lo mismo que en los casos anteriores, con la rapidez del movimiento de la varilla se consigue que el golpe no tenga tiempo de transmitirse a todo el tallo. Se concentra solamente en la pequeña parte, afectada directamente, que sufre todas las consecuencias del golpe.

Como un submarino

Un huevo fresco se hunde en el agua, esto lo sabe cada ama de casa. Cuando quiere saber si los huevos son frescos, los somete precisamente a esta prueba: si un huevo se hunde, es fresco, si flota, no debe comerse. El físico deduce de esta observación que el huevo más fresco pesa más que un volumen igual de agua pura. Digo «pura» porque, si no es pura —por ejemplo, si tiene sal—, pesa más.

Puede prepararse una disolución tan densa de sal en agua, que el huevo sea más liviano que la salmuera que desaloja. Entonces, por el principio de flotación que descubrió Arquímedes en la antigüedad, el huevo más fresco flotará en esta agua.

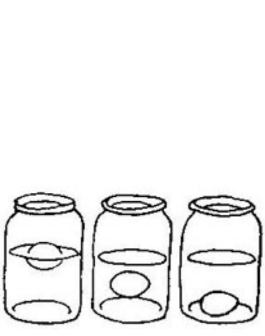


Figura 36

Aplique usted estos conocimientos para hacer el siguiente experimento aleccionador: conseguir que el huevo ni se hunda, ni flote, es decir, que se mantenga «entre dos aguas». El físico diría que el huevo en este estado estaría «suspendido». Para esto tendrá usted que preparar una solución de sal en agua tan concentrada, que el huevo sumergido en ella desaloje exactamente la misma cantidad de salmuera que él mismo pesa. Semejante solución sólo puede obtenerse después de hacer varias pruebas: si el huevo emerge, se añade un poco de agua, y si se hunde, se añade un poco de salmuera más concentrada. Con cierta paciencia logrará usted por fin obtener la salmuera en que el huevo sumergido ni flota ni se va al fondo, sino que permanecerá quieto en el sitio en que lo ponga.

En un estado semejante se encuentra el submarino. Este únicamente puede mantenerse debajo de la superficie del agua, sin caer al fondo, cuando pesa exactamente lo mismo que el agua que desaloja. Para conseguir que tenga este peso, los marinos dejan entrar dentro de él, a unos depósitos especiales, agua del mar; cuando hace falta elevarse, se expulsa esta agua.

El dirigible —no el avión, sino precisamente el dirigible— flota en el aire por esta misma causa: de un modo semejante al huevo en el agua salada, el dirigible desaloja exactamente las mismas toneladas de aire que él pesa.

La aguja flotante

¿Se puede hacer que una aguja de acero flote en el agua lo mismo que una pajita? Al parecer es imposible: un trozo macizo de hierro, aunque sea pequeño, debe hundirse inevitablemente en el agua.

Así piensan muchos, y si usted se encuentra entre estos «muchos», el siguiente experimento le obligará a cambiar de opinión.

Coja usted una aguja de coser ordinaria, que no sea demasiado gruesa, úntela de aceite o de grasa y depósitela con precaución en la superficie del agua de una taza, de un cubo o de un vaso. Verá con admiración que la aguja no se va al fondo. Se mantendrá en la superficie.

¿Por qué no se hunde, siendo más pesada que el agua? Indudablemente la aguja es siete u ocho veces más pesada que el agua y si se encontrara sumergida, no podría de ninguna manera emerger de por sí como emerge una cerilla. Pero nuestra aguja no se va al fondo. Para hallar la causa de que esto ocurra, fíjese atentamente en la superficie del agua junto a la aguja en flotación. Verá que junto a ella forma el agua un hueco, un pequeño valle, en cuyo fondo se encuentra la aguja.

La superficie del agua se comba junto a nuestra aguja porque ésta está recubierta de una tenue capa de grasa que el agua no moja. Usted quizá haya notado que, cuando tiene las manos grasientas, el agua que se echa en ellas deja la piel seca, es decir, no la moja. Las alas de los gansos, y de todas las aves que nadan (palmípedas), están siempre recubiertas de la grasa que segrega una glándula especial; por esto el agua no se adhiere a ellas. Por esta razón, sin jabón, que disuelve la capa de grasa y la elimina de la piel, es imposible lavarse las manos grasientas incluso en agua caliente. A la aguja engrasada tampoco la moja el agua y por eso la vemos en el fondo de la cañada líquida, mantenida por una película de agua que tiende a enderezarse. Esta tendencia del agua a enderezar la superficie sometida a la presión de la aguja, empuja a esta última hacia arriba y no deja que se hunda.

Como nuestras manos tienen siempre algo de grasa, aunque no la engrasemos adrede, la aguja que tengamos en ellas estará ya recubierta de una fina capa grasienta. Por esto se puede que flote una aguja que no haya sido engrasada intencionadamente: lo único que hace falta es adiestrarse a depositarla con mucho cuidado sobre el agua. Esto puede hacerse del siguiente modo: sobre la superficie del agua se pone un trozo de papel de fumar y sobre él se deposita la aguja, después, con otra aguja, se van doblando hacia abajo los bordes del papel hasta que éste se sumerge totalmente en el agua. El trozo de papel de fumar se va entonces al fondo y la aguja se queda en la superficie.

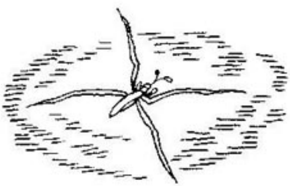


Figura 37

Si ahora tiene usted ocasión de ver al insecto llamado tejedor o zapatero andando por el agua como si fuera por tierra, no le llamará la atención. Comprenderá usted que las patas de este insecto están recubiertas de una grasa que el agua no moja, por lo que debajo de ellas forman una depresión que, al tender a enderezarse, empuja al insecto desde abajo.

Campana de buzo

Para hacer este sencillo experimento sirve una palangana ordinaria; pero si se puede conseguir un tarro profundo y ancho, resulta más cómodo. Nos hará falta, además, un vaso alto o una copa grande. Este último será nuestra campana de buzo, y la palangana con agua representará el mar o un lago en pequeña escala.

No es probable que haya un experimento más simple que éste. Sujete el vaso boca abajo y sumérjalo hasta el fondo de la palangana, sin dejar de sostenerlo con la mano (para que el agua no lo eche hacia arriba).

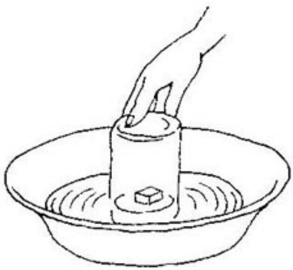


Figura 38

Al hacer esto notará usted que el agua casi no penetra dentro del vaso: el aire le impide el paso. Esto se hace mucho más visible cuando debajo de la campana se encuentra cualquier objeto que se moje fácilmente, por ejemplo, un trocito de azúcar. Ponga sobre el agua un disco de corcho, deposite en él el trozo de azúcar, tápelo con el vaso y sumerja este último en el agua. El azúcar se encontrará entonces más abajo que el nivel del agua, pero seguirá estando seco, ya que por debajo del vaso no entra agua.

Este mismo experimento puede hacerse con un embudo de vidrio, poniéndolo con la parte ancha hacia abajo, tapando bien con un dedo su orificio y sumergiéndolo así en el agua. Esta no penetrará debajo del embudo; pero en cuanto quite el dedo del orificio y le dé salida al aire, el agua se elevará rápidamente en el embudo hasta el nivel de la circundante.

Como ve usted, el aire no es «nada», como estamos acostumbrados a pensar, sino que ocupa un sitio determinado y no lo cede a otros cuerpos si no tiene a donde ir a parar.

Estos experimentos deben servirle también de explicación clara de cómo los hombres pueden hallarse y trabajar debajo del agua, en la campana del buzo o dentro de los tubos llamados «cajones de cimentación». El agua no penetra en la campana de buzo o en el cajón de cimentación, por la misma razón que no pasa por debajo del vaso en nuestro experimento.

Por que no se derrama

El experimento que vamos a describir es uno de los más fáciles de hacer. Este es el primer experimento que yo hice en los días de mi infancia. Llene de agua un vaso, tápelo con una tarjeta postal o con una hoja de papel y, sujetando ligeramente la tarjeta con dos dedos, invierta el vaso. Ya puede usted quitar la mano: el papel no se caerá y el agua no se derramará, si dicho papel está en posición completamente horizontal.

De esta forma puede usted trasladar resueltamente el vaso de un sitio a otro, incluso, quizá, con más comodidad que en las condiciondes normales, porque el agua no salpicará. Cuando tenga ocasión, no le será difícil sorprender a sus amigos trayéndoles el agua — cuando le digan que quieren beber— en un vaso ... boca abajo.

Figura 39

¿Qué es lo que impide que se caiga la tarjeta venciendo el peso del agua que hay sobre ella? La presión del aire: esta presión actúa sobre la tarjeta desde fuera con una fuerza que, como puede calcularse fácilmente, es mucho mayor que el peso del agua que hay en el vaso, es decir, que 200 gramos.

El que por primera vez me enseñó y explicó este experimento me advirtió que, para que salga bien, el vaso debe estar completamente lleno de agua, desde el fondo hasta los bordes. Si al agua sólo ocupa una parte del vaso, y el resto está lleno de aire, el experimento puede fracasar: el aire que hay dentro del vaso presionará sobre el papel, equilibrando la presión que ejerce el aire exterior, y éste, por consiguiente, deberá caerse.

Al saber esto, decidí hacer inmediatamente el experimento con el vaso a medio llenar, para ver yo mismo cómo caía el papel. Puede usted figurarse cuál sería mi sorpresa cuando vi que ... ¡tampoco se caía! Repetí varias veces el experimento y me convencí de que la tarjeta se mantiene tan bien como si el vaso estuviera lleno.

Esto me sirvió de clara lección de cómo hay que estudiar los fenómenos de la naturaleza. En las ciencias naturales, el juez supremo debe ser la *experiencia*. Toda teoría, por muy verosímil que parezca a nuestra razón, debe comprobarse con un experimento. «Creyendo y comprobando»—ésta era la regla de los primeros investigadores de la naturaleza (los académicos florentinos) en el siglo XVII; esta misma regla sigue en vigor para los físicos del siglo XX. Y si al comprobar una teoría resulta que la experiencia no la confirma, hay que buscar en qué peca precisamente dicha teoría.

En nuestro caso no es difícil encontrar el error del razonamiento que, a primera vista, parecía convincente. Separemos con cuidado uno de los ángulos del papel en el instante en que está tapando por abajo la boca del vaso medio lleno de agua. Veremos que, a través del vaso del agua, pasa una burbuja de aire. ¿Qué indica esto? Naturalmente, que el aire que hay en el vaso está más enrarecido que el que hay fuera: de lo contrario el aire de fuera no se lanzaría hacia el espacio que hay sobre el agua. En esto consiste la solución: en el vaso, aunque queda aire, éste es menos denso que el exterior y, por lo tanto, ejerce menos presión. Es evidente que, al invertir el vaso, el agua que baja desaloja de él parte del aire; la parte que queda, al ocupar el volumen inicial, se enrarece y presiona menos.

Como puede ver, incluso los experimentos físicos más simples, si se les presta la atención debida, pueden inducir a razonamientos serios. Estas son las cosas pequeñas que enseñan lo grande.

Del agua y seca

Nos hemos convencido de que el aire que nos rodea por todas partes presiona con una fuerza considerable sobre todos los objetos con los cuales está en contacto. El experimento que vamos a describir ahora demuestra de un modo todavía más claro la existencia de lo que los físicos llaman la «presión atmosférica».

Ponga en un plato llano una moneda o un botón matálico y eche agua. La moneda quedará debajo del agua. Sacarla ahora con las manos desnudas, sin mojarse los dedos y sin vaciar el agua del plato, dirá usted, como es natural, que es imposible. Pero se equivoca, porque es completamente posible.

He aquí lo que hay que hacer. Prenda fuego a un papel dentro de un vaso, y cuando el aire se caliente, invierta el vaso y póngalo en el plato junto a la moneda, de modo que esta última no quede debajo del vaso. Ahora observe lo que va a ocurrir. No tendrá que esperar mucho. El papel que ardía, como es natural, se apaga en seguida y el aire que hay en el vaso comienza a enfriarse. A medida que esto ocurre, el agua será como absorbida por el vaso y pronto se recogerá toda allí, dejando descubierto el fondo del plato.

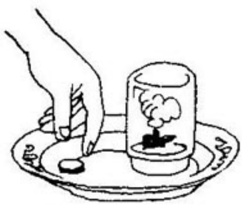


Figura 40

Espere un poco, para que la moneda se seque, y cójala sin mojarse los dedos.

Comprender la causa de estos fenómenos no es difícil. Cuando el aire que hay en el vaso se calienta, se dilata, lo mismo que todos los cuerpos calentados, y la parte sobrante de su nuevo volumen sale del vaso. Pero cuando el aire que queda comienza a enfriarse, resulta insuficiente para, en estado frío, ejercer la misma presión que antes, es decir, para equilibrar la presión exterior de la atmósfera. Por esta razón, debajo del vaso el agua experimenta ahora, sobre cada centímetro de su superficie, una presión menor que en la parte abierta del plato: no es de extrañar, pues, que se vea obligada a entrar debajo de aquél empujada por el exceso de presión del aire exterior. Por consiguiente, el agua no es «absorbida» por el vaso, como parece a primera vista, sino metida a presión debajo de él desde fuera.

Ahora, cuando ya conoce usted la causa de los fenómenos que aquí ocurren, comprenderá también que para hacer este experimento no es necesario utilizar un papel ardiendo, un algodón empapado en alcohol y quemado (como suele aconsejarse) ni, en general, llama alguna. Basta enjugar el vaso con agua hirviendo y el experimento saldrá tan bien como antes. De lo que se trata es de calentar el aire que hay dentro del vaso; el procedimiento por que esto se consiga es absolutamente indiferente.

Es fácil, por ejemplo, hacer este experimento de la forma siguiente. Después de beberse el té, invierta el vaso, antes de que enfríe, y póngalo sobre un platillo en que haya echado usted un poco de té de antemano, para que en el instante de hacer el experimento ya esté frío. Al cabo de uno o dos minutos todo el té del platillo se habrá recogido debajo del vaso.

Paracaídas

De una hoja de papel de seda haga un círculo de varios palmos de diámetro. En el centro recórtele un circulito de varios dedos de anchura. A los bordes del círculo grande ate hilos, ensartándolos en agujeritos; a los extremos colgantes de los hilos, que deben tener la misma longitud, ate cualquier peso ligero. Esta es toda la estructura del paracaídas, semejante, en pequeñas dimensiones, a la gran sombrilla que salva la vida de los aviadores obligados por cualquier motivo a abandonar su aparato.

Para probar cómo funciona nuestro paracaídas en miniatura, déjelo caer, desde la ventana de un piso alto, con el peso hacia abajo. El peso tensará los hilos, el círculo de papel se extenderá y el paracaídas descenderá con suavidad y tomará tierra blandamente. Ésto si no hace viento. Pero si lo hace, aunque sea leve, nuestro paracaídas será arrastrado hacia arriba, se alejará de casa o irá a caer en algún lugar apartado.

Cuanto mayor sea la «sombrilla» del paracaídas, tanto mayor será el peso que pueda usted colgar de él (el peso hace falta para que el paracaídas no sea volcado), tanto más lentamente caerá, si no hace viento, y tanto más largo será su viaje, si lo hace.

Figura 41

Pero, ¿por qué se mantiene el paracaídas tanto tiempo en el aire? Como es natural, usted considera que el aire entorpece la caída del paracaídas; si el peso no fuera atado a la hoja de papel, caería rápidamente a tierra. La hoja de papel aumenta la superficie del objeto que cae, sin aumentar casi nada su peso; y cuanto mayor es la superficie del objeto, tanto más sensible es la resistencia que opone el aire a su movimiento.

Si ha comprendido usted esto, comprenderá también por qué flotan las partículas de polvo en el aire. Suele decirse: el polvo flota en el aire porque es más liviano que él. Esto es falso.

¿Qué son las partículas de polvo? Partículas diminutas de piedra, arcilla, metal, madera, carbón, etc. Todos estos materiales son centenares y millares de veces más pesados que el aire: la piedra, 1500 veces; el hierro, 6000 veces, la madera, 300 veces, y así sucesivamente. Por consiguiente, las partículas de polvo no son más livianas que el aire; al contrario, son mucho más *pesadas* que él y en modo alguno podrían flotar en este medio como las astillas en el agua.

Por lo tanto, toda partícula de cuerpo sólido o líquido debe caer inevitablemente en el aire, es decir, debe «hundirse» en él. Y, en efecto, cae, pero su caída se efectúa de un modo parecido a como lo hace el paracaídas.

Esto se explica por el hecho de que en los granitos pequeños la superficie no disminuye tanto como el peso; en otras palabras, los granitos más pequeños poseen una superficie bastante grande comparada con su peso. Si compara un perdigón con una bala redonda que pese 1000 veces más que él, la superficie del primero resultará ser solamente 100 veces menor que la de la segunda. Esto quiere decir que la superficie del perdigón, si se compara con su peso, es diez veces mayor que la de la bala. Figúrese usted que el perdigón sigue disminuyendo hasta que se hace un millón de veces más ligero que la bala, es decir, hasta que se convierte en una *partícula* de plomo. La superficie de esta partícula, en comparación con el peso, será 10 000 veces mayor que la de la bala. El aire dificultará su movimiento con una fuerza 10 000 veces mayor que la que opone al movimiento de la bala. Por esto la partícula *planea* en el aire, es decir, apenas si se nota como cae, y el soplo más leve de viento hasta puede arrastrarla hacia arriba.

La serpiente y la mariposa

De una tarjeta postal o de una hoja de papel fuerte, recorte usted un círculo del tamaño de la boca de un vaso. Luego, con unas tijeras, corte este círculo siguiendo una línea espiral como si fuera una serpiente enroscada; el extremo del rabo de la serpiente colóquelo, después de apretarlo un poco para hacer un hueco pequeño en el papel, sobre la punta de una aguja de hacer punto clavada en un corcho. Las espiras de la serpiente bajarán al hacer esto y formarán algo parecido a una escalera de caracol.

Figura 42

La serpiente ya está hecha. Pueden empezarse los experimentos con ella. Póngala junto a una hornilla encendida: la serpiente empezará a dar vueltas, con tanta más velocidad cuanto más caliente esté la plancha. En general, junto a cualquier objeto caliente —una lámpara, el samovar—, la serpiente girará más o menos activamente y sin parar, mientras dicho objeto no se enfríe. Girará con mucha rapidez si se cuelga sobre un quinqué, haciendo pasar un hilo por el extremo del rabo y anudándolo.

¿Qué es lo que hace girar a la serpiente? Lo mismo que hace girar las aspas de los molinos de viento: la corriente de aire. Junto a cada objeto caliente existe una corriente de aire templado que se eleva. Se origina esta corriente porque el aire, cuando se calienta, lo mismo que les ocurre a todos los cuerpos (menos al agua helada), se dilata y, por consiguiente, se enrarece, es decir, se hace más ligero. El aire circundante está más frío y, por lo tanto, es más denso y pesado y empuja al caliente obligándolo a subir, y él mismo ocupa su puesto, pero se calienta en el acto y sigue la suerte del primero, siendo desplazado por una nueva porción de aire más frío. De este modo cada objeto caliente origina sobre sí una corriente de aire que se mantiene mientras el objeto esté más caliente que el aire que lo rodea. En otras palabras, de cada objeto caliente sopla hacia arriba un viento caliente imperceptible. Este viento choca con las espiras de nuestra serpiente de papel y hace que gire, lo mismo que el viento hace girar las aspas de un molino.

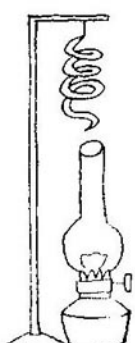


Figura 43

En vez de la serpiente puede hacerse girar un papel de otra forma, por ejemplo, una mariposa. Lo mejor es recortarla de papel de fumar, atarla por el centro y colgarla de un hilo muy fino o de un pelo.

Cuelgue esta mariposa sobre una lámpara y ella empezará a dar vueltas como si estuviera viva. Además, la mariposa proyectará su sombra en el techo, la cual repetirá intensificados todos los movimientos de la de papel que gira. A cualquiera que no sepa de lo que se trata le parecerá que ha entrado en la habitación una gran mariposa negra que planea febrilmente cerca del techo.

También puede hacerse lo siguiente: hincar una aguja en un corcho y colocar la mariposa recortada del papel sobre la punta de esta aguja, apoyándola en un punto tal, que la mariposa quede en equilibrio (este punto —centro de gravedad de nuestra mariposa— hay que buscarlo haciendo una serie de pruebas). La mariposa empezará pronto a dar vueltas si cerca de ella hay algún objeto caliente. A este molinete basta acercarle la palma de la mano para que comience a girar con cierta rapidez.

Con la dilatación del aire al calentarse y sus corrientes templadas ascendentes nos encontramos realmente a cada paso.

Todos saben que, en una habitación con calefacción, el aire caliente se acumula cerca del techo, y el más frío junto al suelo. Por eso parece que una corriente de aire sopla por abajo nuestros pies cuando la habitación no está aún suficientemente caliente. Si se abre un poco la puerta que comunica una habitación caliente con otra fría, el aire frío entra por abajo, y el caliente sale por arriba; la llama de una vela colocada junto a la puerta indicará las direcciones de estas corrientes. Si desea conservar el calor en una habitación con calefacción, procure que por debajo de la puerta no entre en ella aire frío. Para esto no hay más que tapar la rendija con una esterilla o incluso con una simple hoja de periódico. En estas condiciones el aire caliente, como no es desalojado desde abajo por el frío, no puede salir por las rendijas superiores de la habitación.

Y, ¿qué es el tiro de la estufa o de la chimenea de una fábrica si no una corriente ascendente de aire caliente?

Podríamos decir aún muchas cosas acerca de las corrientes templadas y frías de nuestra atmósfera, de los alisios, monzones, brisas y otros vientos semejantes, pero esto nos llevaría demasiado lejos de nuestro tema.

Hielo en una botella

¿Es fácil conseguir en invierno una botella de hielo? Al parecer no hay nada más sencillo, si en la calle está helando. Se llena de agua una botella, se pone fuera de la ventana, y lo demás lo hará la helada. El frío helará el agua y tendremos una botella llena de hielo.

Pero si hace este experimento se convencerá de que la cosa no es tan fácil. Obtendrá hielo, pero la botella no resultará: la presión del hielo al congelarse, la rompe. Ocurre esto porque el agua, al helarse, aumenta de volumen de un modo bastante sensible, aproximadamente en una décima parte. La dilatación se realiza con tal fuerza, que no sólo se rompen las botellas tapadas, sino que incluso a las abiertas se les rompe el gollete, por la presión que ejerce el hielo al dilatarse debajo de él; el agua que se hiela en el gollete hace las veces de tapón de hielo que cierra la botella.

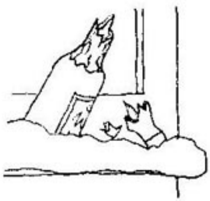


Figura 44

La fuerza de dilatación del agua al helarse puede romper hasta un metal, si la capa de él no es muy gruesa. El agua expuesta a la helada revienta las paredes de 5 centímetros de una bomba de hierro. No es de extrañar que se rompan con tanta frecuencia las tuberías de conducción de agua cuando ésta se hiela en ellas.

Por la dilatación del agua al helarse se explica también que el hielo flote en el agua y no se vaya al fondo. Si el agua se comprimiera al solidificarse —como casi todos los demás líquidos—, el hielo que se forma en ella no flotaría en su superficie, sino que se hundiría. Y entonces nos veríamos privados de los servicios que nos presta cada invierno

...es el hielo-papá
vapor y locomotora nuestra,
gratuita y natural.

Cortar una barra de hielo . . . dejándola entera

Usted habrá oído decir seguramente que dos trozos de hielo sometidos a presión se «sueldan». Esto significa que dichos trozos se hielan aún más intensamente cuando son oprimidos. Precisamente ocurre lo contrario: cuando la presión es muy grande el hielo *se funde*, pero en cuanto el agua fría que se forma en este caso se libera de la presión, vuelve a helarse (porque su temperatura es inferior a 0°). Cuando apretamos unos trozos de hielo ocurre lo siguiente. Los extremos de las partes sobresalientes que se ponen en contacto entre sí y que sufren la presión más fuerte, se funden, formando agua cuya temperatura es inferior a cero grados. Esta agua sale hacia los lados, hacia los intersticios vacíos que hay entre los salientes; aquí no experimenta ya la presión elevada e inmediatamente se hiela, con lo cual suelda los trozos de hielo, formando uno mayor continuo.

Esto que acabamos de decir puede usted comprobarlo haciendo el bonito experimento siguiente. Elija

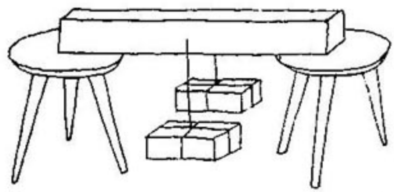


Figura 45

una barra de hielo y apoye sus extremos en dos taburetes, sillas u otros objetos cualesquiera. Tienda por encima de la barra, transversalmente, un alambre de acero delgado, de unos 80 centímetros de largo; el grosor del alambre debe ser de medio milímetro o menos. De los extremos de este alambre cuelgue dos planchas o cualquier otro objeto que pese unos diez kilogramos. Por la presión de la carga, el alambre se hundirá en el hielo, pasará lentamente por toda la barra, pero ... no lo cortará. Cójala resueltamente: ¡estará entera, como si el alambre no la hubiera pasado de arriba a abajo!

Después de lo que se dijo antes acerca de la «soldadura» del hielo, comprenderá usted a qué se debe este raro fenómeno. Sometido a la presión del alambre, el hielo se iba fundiendo, pero el agua pasaba a la parte superior del alambre, se liberaba de la presión y volvía a helarse inmediatamente. En resumen, mientras el alambre cortaba las capas inferiores, las superiores volvían a soldarse.

El hielo es la única substancia de la naturaleza con la cual puede hacerse semejante experimento. Por esto se puede viajar en trineo y patinar sobre el hielo. Cuando un patinador apoya el peso de su cuerpo sobre el patín, el hielo se funde bajo esta presión (si la helada no es demasiado intensa) y dicho patín se desliza; pero al pasar a otro sitio, el patín hace que también aquí se funda el hielo. Donde quiera que el patinador pone el pie, éste convierte la tenue capa de hielo que hay debajo del acero del patín, en agua, la cual, en cuanto se libera de la presión, vuelve a helarse. Por esto, aunque el hielo está seco cuando se hiela, debajo de los patines está siempre lubricado por agua. Esta es la causa de que sea resbaladizo.

Transmisión del sonido

¿Ha tenido usted ocasión de observar desde lejos a un leñador cortando un árbol? O, quizá sea más probable, ¿ha visto desde lejos a un carpintero clavar un clavo? Si es así, se habrá dado cuenta de una cosa muy rara: el golpe suena no cuando el hacha se hunde en el árbol o cuando el martillo le pega al clavo, sino después, cuando el hacha o el martillo ha vuelto a ser levantado.

Si tiene ocasión de observar esto otra vez, retírese cierta distancia hacia atrás o acérquese. Después de hacer varias pruebas hallará un punto en el cual el sonido de los golpes del hacha o del martillo se oirá en el instante en que se ven dichos golpes. Retorne al sitio en que estaba antes y volverá a notar que el sonido no coincide con los golpes.

Ahora le será más fácil comprender cuál es la causa de estos extraños fenómenos. El sonido requiere cierto tiempo para ir desde el sitio en que se produce hasta nuestro oído; la luz recorre esta distancia casi instantáneamente. Y puede ocurrir que mientras el sonido va por el aire hacia su oído, el hacha o el martillo ya han tenido tiempo de levantarse para dar un nuevo golpe. Entonces el ojo ve lo que el oído escucha; a usted le parece que el sonido coincide no con el instante en que la herramienta baja, sino con el de su subida. Pero si se aleja hacia atrás o se acerca hasta la distancia que recorre el sonido durante un vaivén del hacha, en el instante en que el sonido llegue a su oído, el hacha habrá tenido tiempo de bajar de nuevo. En este caso, como es natural, verá y oirá usted simultáneamente un golpe, pero este golpe no será el mismo, sino *distinto*: *verá* usted el último golpe, pero *oirá* un golpe ya pasado (el penúltimo u otro anterior).

¿Qué distancia recorre el sonido en el aire en 1 segundo? Esto se ha medido exactamente: cerca de 1/3 de kilómetro. Cada kilómetro es recorrido por el sonido en 3 segundos, y si el leñador que corta el árbol sacude el hacha dos veces por segundo, será suficiente que usted se halle a una distancia de 160 metros de él para que el sonido del hachazo coincida con la subida del hacha. La luz recorre en el aire cada segundo una distancia casi un millón de veces mayor que el sonido. Usted comprenderá, como es natural, que para todas las distancias que hay en la Tierra podemos considerar, sin temor a equivocarnos, que la velocidad de la luz es instantánea.

El sonido se propaga no sólo a través del aire sino también a través de otros cuerpos gaseosos, líquidos y sólidos. En el agua se propaga el sonido cuatro veces más de prisa que en el aire, y debajo del agua se oye claramente cualquier ruido. Los obreros que trabajan en los cajones de cimentación (grandes tubos verticales) debajo del agua, oyen perfectamente los sonidos de la orilla. Los pescadores pueden decirle cómo huyen los peces del menor ruido sospechoso que se produce en la orilla.

Aún mejor y más de prisa propagan el sonido los materiales sólidos elásticos, por ejemplo, la fundición, la madera, el hueso. Aplique su oreja al extremo de una vigueta o tronco de madera larga y pídale a un camarada que dé un golpecito con la uña o con un palito en el extremo opuesto: oirá usted el sonido fuerte del golpe transmitido a través de toda la longitud de la vigueta. Si alrededor hay suficiente silencio y no estorban sonidos extraños, puede oírse también a través de la vigueta el tic-tac de un reloj aplicado al extremo opuesto. También se propaga bien el sonido a través de los raíles o de las viguetas de hierro, de los tubos de fundición e incluso a través del suelo. Aplicando el oído a la tierra se puede escuchar el chacoloteo de las patas de los caballos mucho antes de que se perciba a través del aire. Por este procedimiento pueden oírse los cañonazos de piezas de artillería tan alejadas, que por el aire no se percibirían en absoluto.

Así transmiten el sonido únicamente los materiales sólidos *elásticos*; los tejidos blandos, mullidos y los materiales inelásticos propagan muy mal el sonido, lo «absorben». He aquí por qué se cuelgan cortinas gruesas en las puertas cuando se quiere que el sonido no llegue a la habitación vecina. Las alfombras, los muebles tapizados y los vestidos actúan sobre el sonido de un modo semejante.

La campana

Entre los materiales que transmiten bien el sonido mencioné en el artículo anterior el *hueso*. ¿Quiere usted convencerse de que los huesos de su propio cráneo poseen esta propiedad? Coja con los dientes la argollita de un reloj de bolsillo y tápese los oídos con las manos; oirá usted con bastante claridad los golpes acompasados del áncora, sensiblemente más sonoros que el tic-tac que de ordinario percibe el oído, a través de los huesos de la cabeza.

Figura 46

Aquí tiene otro experimento divertido que demuestra que los sonidos se transmiten bien a través de los huesos del cráneo. Ate usted una cuchara sopera en la mitad de una cuerda, de modo que ésta última tenga los dos extremos libres. Estos extremos apriételos con los dedos a sus oídos cerrados e inclinando el cuerpo hacia adelante, para que la cuchara pueda balancearse sin dificultad, haga que ésta choque con cualquier cuerpo sólido. Oirá usted un sonido bajo, como si al lado mismo de su oído sonara una campana.

El experimento resulta todavía mejor si en vez de una cuchara se toma algo más pesado.

Una sombra horrible

—¿Quieres ver algo extraordinario? —me preguntó mi hermano mayor una tarde—. Ven conmigo a la habitación de al lado.

La habitación estaba a obscuras. Mi hermano cogió una vela y nos fuímos. Yo iba delante muy decidido, abrí la puerta con audacia y entré el primero en la habitación haciendo alarde de valor. Pero de repente me quedé pasmado: desde la pared me miraba un monstruo absurdo. Era plano, como una sombra, pero me miraba con los ojos desencajados.

Lo reconozco, me acobardé bastante. Y seguramente hubiera echado a correr, si no hubiese oído a mi espalda una carcajada de mi hermano.

Me volví, y comprendí de qué se trataba: el espejo que había colgado en la pared, estaba totalmente tapado con una hoja de papel, en la cual habían recortado unos ojos, una nariz y una boca, y mi hermano dirigía hacia él la luz de la vela de modo que la reflexión de estas partes del espejo cayeran precisamente sobre mi sombra.

Pasé una gran vergüenza: me había asustado de mi propia sombra.

Cuando después quise gastarles la misma broma a mis camaradas, me convencí de que no era tan fácil colocar el espejo de la forma conveniente. Tuve que entrenarme no poco antes de dominar este arte. Los rayos de luz se reflejan en el espejo según unas reglas

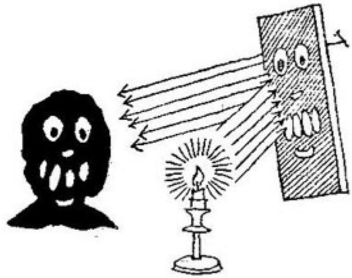


Figura 47

determinadas, a saber: el ángulo que forman con el espejo al encontrarse con él, es igual al que forman después de reflejarse. Cuando conocí esta regla ya no fue difícil darme cuenta de cómo había que colocar la vela con respecto al espejo para que las manchas claras fueran a caer precisamente en los sitios necesarios de la sombra.

Medir la intensidad de la luz

Una vela colocada a doble distancia da una luz más débil. Pero, ¿cuántas veces más débil? ¿Dos veces? No, si pone usted dos velas a doble distancia no darán la misma luz que una a la distancia inicial. Para conseguir la misma iluminación que antes, a doble distancia hay que poner no dos, sino dos por dos, es decir, cuatro velas. A una distancia triple habrá que poner no tres, sino tres por tres, es decir, nueve velas, y así sucesivamente. Esto demuestra que a doble distancia la intensidad de la luz se debilita en cuatro veces, a triple, en nueve, a cuátruple, en 16, a quíntuple, en 5×5, es decir, en 25 veces, etc. Esta es la ley de la disminución de la intensidad de la luz con la distancia. Y al mismo tiempo diremos que la ley de disminución de la intensidad del sonido es idéntica: a una distancia séxtuple, el sonido se debilita no en seis, sino en 36 veces [1]).

Conociendo esta ley podemos aplicarla para comparar entre sí la brillantez de dos lámparas o, en general, de dos fuentes de luz de distinta intensidad. Supongamos, por ejemplo, que usted desea saber con cuántas veces más intensidad brilla su lámpara que una vela ordinaria; en otras palabras, quiere determinar cuántas velas ordinarias serían necesarias para sustituír dicha lámpara y obtener la misma iluminación.

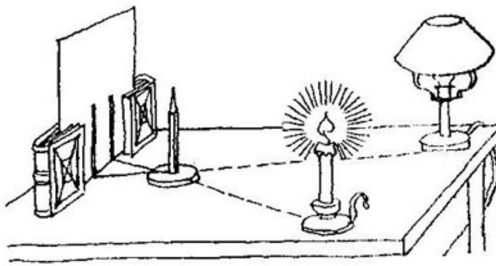


Figura 48

Para esto ponga usted la lámpara y una vela encendida en un extremo de la mesa, y en el otro coloque verticalmente (sujetándolo, por ejemplo, entre las páginas de unos libros) una hoja de cartulina blanca. Delante de esta hoja, no lejos de ella, sitúe, también verticalmente, un palito cualquiera, por ejemplo, un lápiz. Este lápiz proyectará sobre el cartón dos sombras: una, debida a la lámpara, y otra, debida a la vela. La densidad de estas dos sombras, en general, será distinta, porque una de ellas proviene de la lámpara brillante, y la otra, de la pálida vela. Aproximando esta última podrá conseguir que ambas sombras sean igual de negras. Esto significará que ahora la

---

[1]) Esto explica por qué, en el teatro, el cuchicheo de su vecino le impide a usted oír la voz fuerte del actor en escena. Si la escena está 10 veces más lejos de usted que su vecino, la voz del actor se debilitará 100 veces con respecto a como la escucharía si el mismo sonido procediera de la boca de su vecino. Por esto no es extraño que a usted le parezca más débil que el cuchicheo. Por esta misma razón tiene tanta importancia que los alumnos guarden silencio en clase durante las lecciones: la voz del maestro llega a los alumnos (sobre todo a los que están sentados lejos de él) tan debilitada, que incluso un leve cuchicheo del vecino más próximo impide oírlas.

intensidad con que alumbra la lámpara es igual precisamente a la intensidad con que lo hace la vela. Pero la lámpara se encuentra más lejos de la cartulina iluminada por ella que la vela; mida usted cuántas veces está más lejos y podrá calcular cuántas veces *brilla más* la lámpara que la vela. Si, por ejemplo, la lámpara está tres veces más lejos de la cartulina que la vela, su brillo será 3×3, es decir, nueve veces mayor que el de esta última. Por qué esto es así se comprende fácilmente si se recuerda lo que dice la ley de la debilitación de la intensidad de la luz.

Otro procedimiento de comparar la intensidad de la luz de dos focos consiste en utilizar una mancha de grasa en un papel. Esta mancha parece clara, si está iluminada por detrás, y obscura, si lo está por delante. Pero los dos focos que se comparan pueden situarse por ambos lados de la mancha a unas distancias tales, que ésta parezca que está igualmente iluminada por las dos partes. Entonces no queda más que medir las distancias de la mancha a los focos y repetir los cálculos que hicimos en el caso anterior. Y para comparar simultáneamente las dos partes de la mancha, lo mejor es colocar el papel manchado delante de un espejo; en estas condiciones puede verse una parte directamente y la otra, en el espejo. Cómo hacerlo es cosa que usted mismo resolverá.

Cabeza abajo

La habitación en que entró Iván Ivánovich estaba completamente a obscuras, porque los postigos de las ventanas estaban cerrados, y un rayo de luz que entraba por un agujero practicado en uno de ellos tomaba un color irisado y, al toparse con la pared contraria, dibujaba en ella un abigarrado paisaje de tejados de juncos, árboles y el vestido tendido en el patio, pero todo visto del revés.

GOGOL. «De cómo riñeron Iván Ivánovich y Iván Nikiforovich».

Si en su apartamento o en el de alguno de sus conocidos hay una habitación cuyas ventanas den a la parte del sol, no le será difícil convertirla en un aparato físico que se conoce con el antiquísimo nombre de «cámara obscura». Para esto hay que cerrar la ventana con un tablero, por ejemplo, con una chapa de madera o una hoja de cartón forrada de papel obscuro, y practicar en esta última un pequeño orificio. Un día que haga sol, cierre usted la ventana y la puerta de la habitación, para que quede obscura, y ponga frente al orificio y a cierta distancia de él una hoja de papel grande o una sábana: esto será su «pantalla».

En ella parecerá inmediatamente la imagen disminuida de todo lo que puede verse desde la habitación, si se mira a través del orificio practicado. Las casas, los árboles, la gente, aparecerán en la pantalla con sus colores naturales, pero invertidos: las casas, con el tejado hacia abajo, la gente, cabeza abajo, etc.

¿Qué demuestra este experimento? Que la luz se propaga en líneas rectas: los rayos procedentes de la parte superior del objeto y los procedentes de su parte inferior se cruzan en el orificio del tablero y

Figura 49

siguen adelante de tal modo, que los primeros resultarán abajo y los segundos arriba. Si los rayos de luz no fueran rectos, sino que se torcieran o quebraran, resultaría algo completamente distinto.

Es interesante el hecho de que la forma del orificio no influye nada en las imágenes que se obtienen. La imagen que se obtiene en la pantalla será la misma si taladra usted en el tablero un orificio redondo o practica uno cuadrado, triangular, hexagonal o de otra forma cualquiera. ¿Ha tenido usted ocasión de ver en la tierra, bajo algún árbol frondoso, unas manchitas claras ovaladas? Pues éstas no son más que imágenes del Sol dibujadas por los rayos que pasan a través de diversos intersticios entre las hojas. Son casi redondas porque el Sol es redondo, y un poco alargadas, porque inciden oblicuamente sobre la tierra. Ponga usted una hoja de papel de manera que forme un ángulo recto con los rayos de sol y obtendrá en ella manchas completamente redondas. Y durante un eclipse de sol, cuando la obscura esfera de la Luna se aproxima al Sol y lo tapa, convirtiéndolo en una hoz brillante, las manchas redondas de debajo de los árboles se transforman en pequeñas medias lunas.

El aparato con que trabajan los fotógrafos no es otra cosa que una cámara obscura, con la única diferencia de que en su orificio se ha puesto un objetivo para que la imagen resulte más clara y nítida. En la pared posterior de esta cámara se coloca un vidrio esmerilado, en el cual se obtiene la imagen cabeza abajo; el fotógrafo puede observarla únicamente si cubre la cámara y su propia cabeza con un lienzo negro, para que la luz extraña no moleste sus ojos.

Una cámara, semejante hasta cierto punto a ésta, puede hacerla usted mismo. Consiga una caja cerrada alargada y taladre en una de sus paredes un agujero. Quite la pared opuesta al orificio practicado y extienda en su lugar un papel untado en aceite. Este papel hará las veces de vidrio esmerilado. Colocando la caja en la habitación obscura y aplicando su agujero al practicado en la ventana cerrada, verá en su pared posterior una imagen bastante clara del mundo exterior, invertida, como es natural.

Su cámara tendrá la ventaja de que con ella no necesitará usted la habitación obscura, y podrá sacarla al aire libre y ponerla en cualquier parte. Lo único que tendrá que hacer es taparse la cabeza, y la cámara, con un lienzo obscuro, para que la luz extraña no le impida distinguir bien la imagen que se obtiene en el papel engrasado.

El alfiler invertido

Acabamos de hablar acerca de la cámara obscura, y de explicar como se hace, pero no hemos dicho una cosa interesante: que cada persona lleva siempre consigo dos pequeñas cámaras obscuras. Estas son nuestros ojos. Figúrese usted, el ojo está construido de un modo semejante a la caja que le he propuesto hacer. Lo que se llama «pupila» del ojo no es un circuito negro en él, sino un orificio que conduce a las negras entrañas de nuestro órgano visual. Este orificio está cubierto por fuera de una capa transparente y de una substancia gelatinosa, también transparente que hay debajo de la primera; por detrás se adapta a la pupila el «cristalino», que tiene forma de lente biconvexa, y todo el interior del ojo, desde detrás del cristalino hasta la pared posterior, en que se dibuja la imagen de los objetos externos, está llena de una substancia transparente. La forma que tiene nuestro ojo cortado longitudinalmente se representa en la fig. 50. Pero todo esto no impide que el ojo siga siendo una cámara obscura,

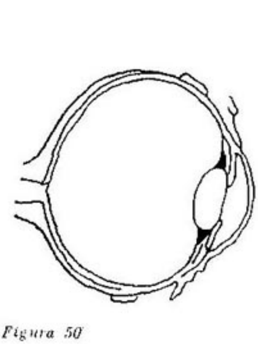


Figura 50

sólo que perfeccionada, ya que en el ojo se obtienen imágenes más claras y nítidas. Estas imágenes en el fondo del ojo son muy pequeñas: por ejemplo, un poste del telégrafo de 8 metros de altura, visto desde 20 metros de distancia, se dibuja en el fondo del ojo en forma de una rayita finísima de, aproximadamente, medio centímetro de longitud.

Pero lo más interesante aquí es que, aunque todas las imágenes se forman en el ojo, lo mismo que en la cámara obscura, invertidas, nosotros vemos los objetos derechos. Esta reinversión se produce en virtud de la larga costumbre: nosotros estamos acostumbrados a utilizar nuestros ojos de modo que a cada imagen visual percibida le hacemos tomar su posición natural.

Que esto ocurre efectivamente así, puede usted comprobarlo en la experiencia. Procuremos hacer de forma que en el fondo del ojo se forme no una imagen invertida, sino derecha, del objeto. ¿Qué veremos entonces? Como estamos acostumbrados a invertir todas las imágenes, también invertiremos ésta; esto quiere decir que, en este caso, debemos ver no la imagen derecha, sino la invertida. Así es en realidad. El siguiente experimento revela esto con bastante claridad.

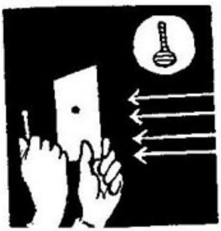


Figura 51

Con un alfiler, haga un agujerito a una tarjeta postal y manténgala delante de la ventana o de una lámpara a unos 10 centímetros del ojo derecho; delante de la tarjeta tenga el alfiler de tal modo, que su cabeza se halle frente al agujerito. En estas condiciones verá usted el alfiler como si estuviera *detrás* del orificio y, lo que es más importante, *invertido*. La fig. 51 muestra esta vista insólita. Y si desplaza el alfiler un poco hacia la derecha, su ojo verá que se desplaza *hacia la izquierda*.

La causa de que esto ocurra es que, en este caso, el alfiler se dibuja en el fondo del ojo no en posición invertida, sino derecha. El orificio de la tarjeta desempeña aquí el papel de foco luminoso que proyecta la sombra del alfiler. Esta sombra incide sobre la pupila y su imagen se obtiene no invertida, porque está demasiada próxima a la pupila. En la pared posterior del ojo se obtiene un círculo brillante; ésta es la imagen del orificio de la tarjeta. Y en él se ve la silueta obscura del alfiler, es decir, su sombra en posición derecha. Pero a nosotros nos parece que vemos el alfiler a través del agujerito de la tarjeta, detrás de él (ya que sólo vemos la parte del alfiler que cabe en el orificio) e invertido, porque, debido a la costumbre ya arraigada, le damos la vuelta inconscientemente a todas las imágenes visuales que percibimos.

Encender fuego con hielo

De pequeño me gustaba ver como mi hermano encendía el cigarrillo con un cristal de aumento. Colocaba el cristal bajo los rayos del sol, enfocaba la brillante manchita al extremo del cigarrillo y éste empezaba a echar una columnita azulada de humo, ardía.

—Pues, sabes —me dijo mi hermano un día de invierno—, el cigarro puede encenderse también con hielo.

—¿Con hielo? —me asombré yo.

—Lo enciende, como es natural, no el hielo, sino el sol, pero el hielo concentra sus rayos lo mismo que este vidrio.

—¿Y tú quieres hacer un vidrio de hielo, para encender?

—De hielo ni yo ni nadie puede hacer un vidrio. Pero una *lente* de hielo con la que se pueda encender fuego, podemos hacerla.

—Y, ¿qué es una lente?

—La forma que le daremos al hielo, como la de este vidrio, parecida a la de una lenteja: redonda, convexa, gruesa en el centro y delgada en los bordes.

—¿Y encenderá?

—Claro que encenderá.

—¡Pero si estará fría!

—Eso no importa. Si quieres, probamos.

Lo primero que hizo mi hermano es decirme que trajera una jofaina. La traje y él la desechó..

—Esta no sirve: ves, tiene el fondo plano. Tiene que tener el fondo curvo.

Cuando traje la otra jofaina, mi hermano echó agua limpia en ella y la puso a que se helase:

Figura 52

—Déjala que se hiele hasta el fondo; entonces tendremos una lente de hielo: por una parte será plana, y por la otra, convexa.

—¿Y tan grande?

—Cuanto más grande sea, mejor: más rayos solares recogerá en un punto.

Al día siguiente por la mañana corrí a ver nuestra jofaina. El agua se había helado en ella hasta el mismo fondo.

—Va a ser una lente estupenda —decía mi hermano, dándole golpecitos con el dedo al hielo—. Saquémosla de la jofaina.

Esto resultó ser cosa fácil. Mi hermano metió la jofaina helada en otra, que tenía agua caliente, y el hielo se derritió pronto junto a las paredes. Sacamos la jofaina con el hielo al patio y pusimos la lente sobre una tabla.

—Hace buen tiempo —dijo mi hermano, entornando los ojos al sol—. El más a propósito para encender. Ten el cigarro.

Yo sostuve el cigarrillo y mi hermano cogió la lente con ambas manos y la volvió hacia el sol, de modo que él mismo no le daba sombra. Tuvo que hacer no pocas tentativas hasta que consiguió dirigir la manchita brillante de la lente al cigarrillo. Cuando la manchita se detenía en mis manos, yo sentía lo caliente que era. Yo no dudaba de que el hielo encendería el cigarrillo.

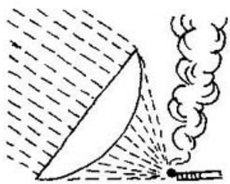


Figura 53

Y, en efecto, cuando la manchita cubrió el extremo del cigarrillo y se mantuvo allí cosa de un minuto, éste empezó a arder y a echar humo azulado.

—Ves, lo hemos encendido con hielo —dijo mi hermano, llevándose a la boca el cigarrillo encendido—. Así puede encenderse una hoguera, sin cerillas, aunque sea en el mismo polo, si es que hay leña.

La aguja magnética

Usted ya sabe lo que hay que hacer para que una aguja flote en la superficie del agua. Aproveche ahora este arte para hacer un nuevo experimento más interesante. Consiga un imán, aunque sea un pequeño imán en herradura. Si este imán se acerca a un platillo con agua en el que flote una aguja, ésta se dirigirá dócilmente hacia el correspondiente borde del platillo. La aguja hará esto con mucha más rapidez, si antes de ponerla sobre el agua pasa usted el imán varias veces por ella (debe pasarse uno de los extremos del imán y siempre en la misma dirección, y no en un sentido y en otro). Al hacer esto, la propia aguja se convierte en imán, es decir, se imana, y por esto, cuando está flotando, se dirige incluso a cualquier objeto no magnético de hierro ordinario.

Con una aguja magnética puede hacer usted muchas observaciones interesantes. Abandónela a sí misma, sin atraerla hacia el borde del platillo con ningún hierro o imán. La aguja tomará en el agua una dirección determinada, a saber, la dirección norte—sur, lo mismo que la de la brújula. Gire el platillo, y verá que la aguja sigue indicando, como antes, con uno de sus extremos, el norte, y con el otro, el sur. Aproxime a uno de los extremos de la aguja un extremo (polo) del imán y observará que aquél no siempre es atraído por éste. La aguja puede volverse con respecto al imán, para acercar a él su extremo opuesto. Aquí tenemos un caso de *interacción* de dos imanes. La regla de esta interacción dice, que los extremos de *distinto nombre* (norte de un imán y sur de otro) se atraen, y los del *mismo nombre* (ambos norte o ambos sur) se repelen.

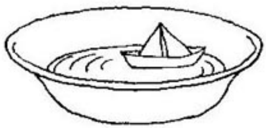


Figura 54

Después de estudiar las peculiaridades de los movimientos de la aguja imanada, haga un pequeño barquito de papel y entre los pliegues de este último esconda una aguja. Así podrá admirar a sus camaradas no enterados, dirigiendo los movimientos del barquito sin tocarlo: éste obedecerá los movimientos de su mano, si, como es natural, tiene usted oculto en ella imán, cuya presencia no sospechen sus amigos.

Teatro magnético

Mejor dicho, no es un teatro, sino un circo, porque en él se presentan bailarines funambúlicos ... recortados de papel.

Ante todo tenemos que construir de cartón el edificio del circo. Después, en la parte baja de la escena tense un alambre, y sobre ella fije un imán en herradura.

Figura 55

Ahora ocúpese de los artistas. Se recortan de papel, en distintas posiciones, de acuerdo con el oficio artístico que se les designe, con la única condición imprescindible de que su altura sea igual a la longitud de la aguja que se pega detrás de ellos, a lo largo de la figura: puede pegarse con dos o tres gotitas de lacre.

Si una figura de éstas se coloca sobre la «cuerda», no sólo no se caerá, sino que permanecerá en posición vertical, atraída por el imán. Tirando ligeramente del alambre, animará usted sus bailarines volatineros, haciendo que se balanceen y den saltitos, sin perder el equilibrio.

Un peine electrizado

Aunque no sepa nada de la ciencia de la electricidad y desconozca hasta las primeras letras de su abecedario, puede hacer una serie de experimentos eléctricos curiosos y, en todo caso, útiles para su futuro estudio de esta admirable fuerza de la naturaleza.

El mejor sitio y tiempo para hacer estos experimentos eléctricos es una habitación caliente en un día de invierno que esté helando. Los experimentos de este tipo sólo salen bien cuando el aire está seco, y el aire caliente en invierno es mucho más seco que en verano a la misma temperatura.

Dicho esto, pasemos a los experimentos. Usted, como es lógico, se habrá pasado alguna vez un peine ordinario por sus cabellos *completamente* secos. Si ha hecho esto en una habitación caliente y en completo silencio, habrá podido oír el ligero chisporroteo que produce el peine al peinarse. Su peine se electrizaba al frotar con los cabellos.

Figura 56

Un peine ordinario puede electrizarse no sólo rozándolo con los pelos: si se frota con un paño de lana seco (o un trozo de franela), también adquiere propiedades eléctricas, incluso en mayor grado. Estas propiedades se ponen de manifiesto de formas muy diversas, y ante todo en la atracción de cuerpos ligeros. Acerque un peine frotado a unos trocitos de papel, o salvado, a una bolita de médula de saúco, etc., y todos estos pequeños objetos subirán y se adherirán al peine. Haga unos barquitos diminutos de papel liviano y échelos al agua: con un peine electrizado podrá dirigir los movimientos de su flotilla de papel, lo mismo que con una «varilla de virtudes». Puede hacerse un experimento aún más convincente: coloque un huevo en el huevero seco y, sobre él, ponga en equilibrio, horizontalmente, una regla bastante larga. Esta regla, cuando se acerque el peine electrizado a uno de sus extremos, girará con apreciable rapidez. Usted podrá hacer que la regla siga sumisamente al peine: que gire a uno u otro lado y que hasta dé vueltas completas.

Un huevo obediente

Estas propiedades eléctricas puede usted comunicárselas no sólo a un peine común, sino también a otros objetos. Una barra de lacre, frotada con franela o con la manga de una chaqueta, si es de lana, manifestará estas mismas propiedades. También se electriza un tubito a una barra de vidrio, si se frota con seda:

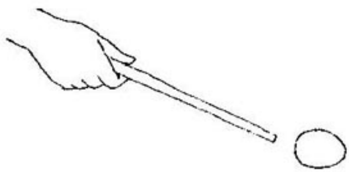


Figura 57

pero el experimento con el vidrio solamente sale bien cuando el aire está muy seco y tanto el vidrio como la seda se ha secado bien calentándolos.

He aquí otro experimento divertido de atracción eléctrica. A través de un pequeño orificio, vacíe el contenido de un huevo de gallina: para conseguir esto, lo mejor es soplar dicho contenido por otro orificio practicado en el extremo opuesto. Una vez obtenido el cascarón vacío (los orificios se tapan con cera blanca), póngalo sobre una mesa, tablero o plato grande y, valiéndose de una varilla electrizada, haga que este huevo vacío ruede obedientemente detrás de ella. En un observador que *no* sepa que el huevo está vacío, este experimento (ideado por el insigne científico Faraday) produce una impresión desconcertante. Un anillo de papel o una pelotita liviana también siguen a la varilla electrizada.

Interacción

La mecánica enseña que una atracción unilateral —y en general una acción unilateral— no puede existir: toda acción tiene su reacción. Esto quiere decir, que si una varilla electrizada atrae diversos objetos, la propia varilla es atraída por ellos. Para convencerse de que existe esta atracción no hay más que darle movilidad al peine o a la varilla, por ejemplo, colgándolos de un hilo (que es preferible que sea de seda).

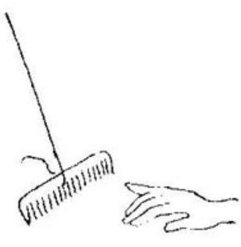


Figura 58

Entonces es fácil notar que cualquier objeto no electrizado —su mano, por ejemplo—, atrae al peine, hace que gire, etc.

Esto, volvemos a repetirlo, es una ley general de la naturaleza. Esta ley se manifiesta siempre y en todas partes: toda acción es la interacción de dos cuerpos que actúan el uno sobre el otro en sentido contrario. Una acción unilateral, no acompañada de la reacción de otro cuerpo, sobre el cual está dirigida, no existe nunca en la naturaleza.

Repulsión eléctrica

Volvamos al experimento con el peine electrizado colgado. Vimos que era atraído por cualquier cuerpo no electrizado. Resulta interesante probar cómo actuará sobre él otro objeto también electrizado. La experiencia le convencerá de que esta acción mutua de dos cuerpos electrizados puede ser diversa. Si al peine electrizado acerca una varilla de vidrio también electrizada, ambos objetos se atraerán entre sí. Pero si aproxima al peine una varilla de lacre electrizada u otro peine, la interacción se manifiesta en forma de repulsión.

La ley física que abarca este tipo de fenómenos, dice: las electricidades de *signos distintos* se atraen, y las de *signos iguales* se repelen. Son electricidades de igual signo las de los plásticos y el lacre (esta electricidad se llama resinosa o *negativa*), y de signo contrario, la electricidad resinosa y la electricidad vítrea (*positiva*). Las antiguas denominaciones de electricidad «resinosa» y «vítrea» ya no se usan, han sido desplazadas totalmente por las de electricidad «negativa» y «positiva».

En la repulsión de los objetos electrizados con electricidad de igual signo se basa la construcción de un aparato muy simple, que sirve para descubrir la presencia de la electricidad, llamado electroscopio. El sufijo «scopio» procede del griego «σκοπεω» y significa «observar» o «examinar»; por este mismo modelo se forman las palabras «telescopio», «microscopio» y otras.

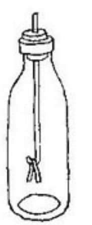


Figura 59

Usted mismo puede hacer este sencillo aparato. Por el centro de un redondel de cartón o de un corcho, que puedan servir de tapa a la boca de un tarro, se hace pasar una varilla; parte de ella debe sobresalir por arriba. Al extremo inferior de esta varilla se fijan con cera dos tiras de papel de estaño o de papel de fumar. Hecho esto, se pone el corcho o el redondel de cartón en la boca del frasco, se lacra a ella, y el electroscopio está listo para ser utilizado. Si acerca ahora al extremo saliente de la varilla un objeto electrizado, su electricidad se comunica a las dos tiras; ambas se electrizan simultáneamente y, por esta razón, se separan, debido a la repulsión mutua. La separación de las hojillas indica que el objeto que se puso en contacto con la varilla del electroscopio estaba electrizado.

Si el arte de construir no se le da bien, puede hacer un electroscopio más sencillo: no será tan cómodo ni tan sensible, pero, a pesar de esto, servirá. Cuelgue de un palito de madera dos bolitas de médula de saúco, atadas con unos hilos, de modo que, al colgar, se toquen. Esto es el electroscopio: tocando una de las bolitas con el objeto que se prueba, verá usted que la otra bolita se desvía hacia un lado, si el objeto estaba electrizado.

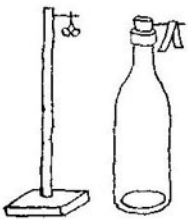


Figura 60

Finalmente, en la figura puede ver usted otro tipo de electroscopio simplificado: de un alfiler hincado en el tapón de una botella se cuelga una tira de papel de estaño doblada por la mitad. Tocando el alfiler con un objeto electrizado, hará usted que las tiras se separen una de otra.

Una de las peculiaridades de la electricidad

Valiéndose de un aparato improvisado fácil de hacer, podrá usted comprobar una peculiaridad interesante y muy importante de la electricidad: ésta se concentra únicamente en la superficie del objeto, es más, solamente en sus partes convexas o salientes.

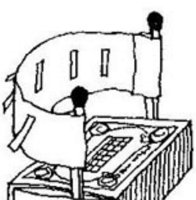


Figura 61

Con una gota de lacre, pegue usted una cerilla, en posición vertical, a una caja de cerillas; haga dos soportes de este tipo. Después, corte usted una tira de papel cuya anchura sea igual aproximadamente a la longitud de una cerilla, y cuya longitud sea de unas tres cerillas. Los extremos de la tira de papel enróllelos en forma de tubito, para que por ellos pueda meter las cerillas de los soportes. A esta tira de papel péguele a cada lado tres o cuatro tiritas estrechas de papel de fumar fino (fig. 61) y móntela en los soportes antedichos.

Con este aparato podemos hacer ahora unos experimentos. Tensemos la tira de papel y toquémosla con una varilla de lacre electrizada: el papel y todas las tiritas pegadas a él se electrizan simultáneamente; esto se manifiesta en que las tiritas de papel de fumar se levantan por ambos lados de la tira de papel. Coloque ahora los soportes de tal modo, que la tira se curve, y vuelva a electrizarla: las tiritas de papel de fumar sólo se levantarán en la parte convexa de la tira, en la parte cóncava seguirán colgando como antes. ¿Qué demuestra esto? Que la electricidad se concentra únicamente en la parte convexa. Déle a la tira de papel la forma de S y podrá convencerse una vez más de que la electricidad sólo manifiesta su presencia en la parte convexa del papel.

UNA HOJA DE PERIODICO

¿Qué quiere decir «mirar con la cabeza»? • Un periódico pesado

—¡Decidido! —anunció mi hermano mayor, dando una palmada a los azulejos de la estufa encendida—: esta tarde haremos experimentos eléctricos.

—¿Experimentos? ¡Nuevos experimentos! —exclamé yo entusiasmado—. ¿Cuándo? ¿Ahora? Yo quiero hacerlos ahora.

—Pues ten paciencia. Los haremos esta tarde. Ahora tengo que marcharme.

—¿Por la máquina?

—¿Qué máquina?

—La eléctrica. Para los experimentos hará falta una máquina.

—La máquina que nos hará falta ya la tenemos, está en mi cartera. Pero, haz el favor de no buscarla sin mí —previó mi hermano lo que yo pensaba—. No la encontrarás y me revolverás todo —añadió, mientras se ponía el abrigo.

—Pero, ¿la máquina está ahí?

—Ahí está, no te preocupes.

Y mi hermano salió de casa, dejando tranquilamente la cartera, con la máquina, en la mesita que había en la antesala.

Si el hierro pudiera sentir, experimentaría junto a un imán lo mismo que yo notaba cuando me quedé a solas con la cartera de mi hermano. La cartera tiraba de mí, atraía todos mis sentimientos e ideas. Era imposible pensar en ninguna otra cosa, era inútil pretender mirar a otra parte ...

Es raro que una máquina eléctrica pueda caber en una cartera. Yo me la figuraba menos delgada. La cartera no estaba cerrada con llave, y si, con cuidado, echaba una ojeada a su interior... Aquí hay algo envuelto en un periódico. ¿Una caja? No, son libros. Libros y más libros, otra cosa no hay en la cartera. ¿Cómo no se me ocurrió en el acto que mi hermano me había gastado una broma? ¡Puede, acaso, guardarse una máquina eléctrica en una cartera!

Mi hermano regresó con las manos vacías y, por la cara desilusionada que yo tenía, se dio cuenta en seguida de la causa de mi triste aspecto.

—¿Me parece que le has hecho una visita a mi cartera? —preguntó él.

—¿Dónde está la máquina? —fue mi respuesta.

—En la cartera. ¿No la has visto?

—Ahí no hay más que libros.

—Y la máquina. Por lo visto has mirado mal. ¿Con qué has mirado?

—¿Qué con qué he mirado? Con los ojos.

—Está claro, has mirado sólo con los ojos. ¡Hay que mirar con toda la cabeza! No basta mirar, hay que comprender lo que se ve. Esto es lo que se llama «mirar con la cabeza». Si quieres te demostraré la diferencia que hay entre mirar sólo con los ojos y mirar con la cabeza.

Mi hermano sacó del bolsillo un lápiz y dibujó en un papel la figura representada a la izquierda.

—Aquí las líneas dobles representan vías férreas, y las simples, carreteras. Mira atentamente y dime: ¿qué vía es más larga, la que va de *1* a *2*, o la que va de *1* a *3*?

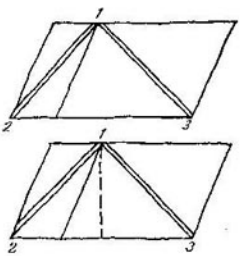


Figura 62

—La de *1* a *3* es, naturalmente, la más larga.

—Eso es lo que has visto con los ojos. Pero ahora mira la figura con toda la cabeza.

—¿Cómo? Yo no sé.

—Con toda la cabeza puede mirarse esta figura así. Figúrate que desde *1* bajamos una recta perpendicular a la carretera *2*—*3* —mi hermano trazó una línea punteada en su dibujo—. ¿Cómo divide mi línea a esta carretera? ¿En qué partes?

—Por la mitad.

—Por la mitad. Por consiguiente, todos los puntos de esta línea distarán lo mismo de los extremos *2* y *3*. ¿Qué dices ahora del punto *1*? ¿De dónde está más cerca, de *2* ó de *3*?

—Ahora veo claramente que está a la misma distancia de *2* que de *3*. Pero antes me pareció que el ferrocarril de la derecha era más largo que el de la izquierda.

—Antes miraste sólo con los ojos, y ahora has mirado con toda la cabeza. ¿Has comprendido la diferencia?

— Sí. Pero, ¿dónde está la máquina?

—¿Qué máquina? ¡Ah, la eléctrica! En la cartera. Está donde estaba. No la viste porque no sabías mirar con la cabeza.

Mi hermano sacó de la cartera el paquete con los libros, lo desenvolvió con cuidado, dejó libre una hoja grande de periódico y me la dio:

—Esta es nuestra máquina eléctrica.

Yo miré desconcertado el periódico.

—¿Crees que esto no es más que un papel? —prosiguió mi hermano—. Para la vista, sí. Pero el que sabe mirar con toda la cabeza reconoce que el periódico es un aparato físico.

—¿Un aparato físico? ¿Para hacer experimentos?

—Sí. Coge el periódico. ¿Pesa poco, verdad? Y tú crees, como es natural, que puedes levantarlo siempre hasta con un solo dedo. Pues, ahora verás como este mismo periódico se hace a veces pesadísimo. ¡Dame aquella regla de dibujo!

—Está mellada, no sirve para nada.

—Tanto mejor, no sentiremos que se rompa.

Mi hermano puso la regla sobre la mesa, de modo que una parte de ella sobresalía del borde.

—Toca el extremo sobresaliente. ¿Es fácil de inclinar, verdad? Bueno, pues, prueba a inclinarlo cuando yo cubra el otro extremo de la regla con el periódico.

Extendió el periódico en la mesa, le alisó cuidadosamente los pliegues y tapó con él la regla.

—Coge un palo y da un golpe fuerte sobre la parte de la regla que sobresale. ¡Dale con todas tus fuerzas!

—Le voy a dar un golpe, que la regla romperá el periódico y saltará hasta el techo —dije yo, y levanté el palo.

—No escatimes fuerzas.

El resultado del golpe fue completamente inesperado: sonó un chasquido, se rompió la regla, y el periódico siguió en la mesa, como antes, cubriendo el resto roto de la desdichada regla.

—El periódico es más pesado de lo que tú creías, ¿no es así? —me preguntó mi hermano con malicia.

Figura 63

Yo miraba desconcertado los restos de la regla y el periódico.

—¿Esto es un experimento? ¿Eléctrico?

—Sí, un experimento, pero no eléctrico. Los eléctricos vendrán después. Sin embargo, yo quería demostrarte que un periódico puede servir, en efecto, de aparato para hacer experimentos físicos.

—Pero, ¿por qué no dejó salir a la regla, si yo puedo levantarlo fácilmente de la mesa?

—Eso es el quid del experimento. Sobre el periódico presiona el aire y ... con no poca fuerza: cada centímetro cuadrado de la hoja de periódico es apretado por él con la fuerza de un kilogramo. Cuando se golpea el extremo de la regla que sobresale, ésta presiona con su otro extremo, desde abajo, sobre el papel y el periódico debe levantarse. Si esto se hace despacio, debajo del periódico, que empieza a levantarse, tiene tiempo de entrar aire desde fuera, el cual, con su presión, equilibra la que sufre el periódico por arriba. Pero tu golpe fue tan rápido, que el aire no tuvo tiempo de penetrar debajo del periódico: el borde de la hoja de papel aún estaba en contacto con la mesa, cuando su parte central ya era empujada hacia arriba. Por esto tuviste que levantar no sólo el periódico, sino también el aire que presionaba sobre él. En resumidas cuentas: hubieras tenido que levantar con la regla un peso aproximado igual a tantos kilogramos como centímetros cuadrados tiene la parte del periódico a levantar. Si ésta fuera una parte del papel de sólo 16 centímetros cuadrados —un cuadradito de 4 centímetros de lado—, la presión del aire sobre él sería de 16 kilogramos. Pero la parte del papel que había que levantar era considerablemente mayor, por lo tanto, el peso a levantar era grande, quizá de medio ciento de kilogramos. La regla no aguantó este peso y se rompió. ¿Crees ahora que con un periódico pueden hacerse experimentos? ... Cuando anochezca, empezaremos con los eléctricos.

Los dedos despiden chispas • Un palo obediente • La electricidad en las montañas

Mi hermano cogió con una mano un cepillo de la ropa y con la otra arrimó una hoja de periódico a la estufa caliente y empezó a frotarla con el cepillo, lo mismo que un empapelador cuando extiende el papel sobre la pared para que se pegue bien.

—¡Mira! —dijo mi hermano, al mismo tiempo que retiraba ambas manos del periódico.

Yo esperaba que el papel se deslizaría hacia el suelo. Pero no fue así: el periódico quedó sujeto de un modo raro a los lisos azulejos, como si estuviera pegado.

—¿Cómo se sostiene —pregunté yo—, si no tiene cola?

—Lo sostiene la electricidad. Ahora está electrizado y lo atrae la estufa.

—¿Y por qué no me dijiste que el periódico que tenías en la cartera estaba electrizado?

—Antes no lo estaba. Lo he electrizado yo ahora, delante de tí, frotándolo con el cepillo. Se ha electrizado por frotamiento.

—Entonces, ¿esto ya es un experimento eléctrico de verdad?

—Sí. No hemos hecho más que empezar. ¡Apaga la luz!

En la obscuridad se dibujaba confusamente la negra figura de mi hermano y una mancha grisácea en el lugar en que estaba la blanca estufa.

—Ahora fíjate bien en mis manos.

Yo más bien suponía, que veía, lo que hacía mi hermano. Desprendió el periódico de la estufa y, manteniéndolo con una mano en el aire, aproximó a él los dedos abiertos de la otra mano.

Y entonces —yo no podía dar crédito a mis ojos— de sus dedos se desprendieron chispas: ¡Chispas largas, blanco-azuladas!

—Estas chispas eran eléctricas. ¿Quieres probar tú mismo?

Yo me apresuré a ocultar mis manos detrás de la espalda. ¡Por nada del mundo!

Mi hermano volvió a aplicar el periódico a la estufa, lo frotó con el cepillo y de nuevo hizo saltar de sus dedos haces de largas chispas. Pude darme cuenta de que sus ed os no llegaban a tocar el periódico, sino que se mantenían a unos diez centímetros de él.


Figura 64

—Prueba, no tengas miedo, no duele nada. Dame la mano —dijo, y cogió una de mis manos y me acercó a la estufa —: ¡Abre los dedos! ... ¡Así! ¿Qué, te duele?

Yo no tuve tiempo de volver en mí, cuando de mis dedos salían ya haces de chispas azuladas. A su luz pude ver que mi hermano sólo había separado de la estufa la mitad del periódico, la parte inferior de la hoja de papel seguía como pegada a ella. Al mismo tiempo que las chispas sentí un ligero pinchacito, pero el dolor fue insignificante. En efecto, no había nada que temer.

—¡Más! —ahora era yo el que quería.

Mi hermano aplicó el periódico a la estufa y comenzó a frotarlo con las palmas de las manos.

—¿Qué haces? ¡Te has olvidado del cepillo!

—Es lo mismo. ¡Prepárate!

—No saldrá nada. Lo has frotado con las manos, sin cepillo.

—Sin cepillo también se puede hacer, si las manos están secas. Lo que hace falta es frotarlo.

Efectivamente, también esta vez despidieron chispas mis dedos, lo mismo que antes.

Cuando me harté de ver chispas, me dijo mi hermano:

—Bueno, basta. Ahora te enseñaré la descarga en penacho, la misma que vieron Colón y Magallanes en las puntas de los mástiles de sus ambarcaciones ... ¡Dame las tijeras!

Mi hermano acercó en la obscuridad las puntas de las tijeras abiertas al periódico, medio separado de la estufa. Yo esperaba ver chispas, pero vi algo nuevo: las puntas de las tijeras se coronaron de haces brillantes de cortos hilos azul-rojizos, aunque aún se hallaban del papel bastante lejos. Al mismo tiempo se oía un ligero susurro prolongado.

Figura 65

—Penachos de fuego como éstos, sólo que mucho más grandes, ven con frecuencia los marinos en los extremos de los mástiles y en las vergas. Ellos les llaman «fuegos de Santelmo».

—¿Y cómo se producen allí?

—Es decir, ¿quién sostiene el periódico electrizado sobre los mástiles? ¿Eso es lo que querías preguntar? Pues, como es lógico, allí no hay periódico, pero hay en cambio una nube electrizada baja. Ella es la que hace las veces de periódico. Y no creas que esta luminosidad eléctrica de las puntas agudas suele producirse sólo en el mar. También se observa en tierra, sobre todo en las montañas. Julio César describía ya cómo una noche nublada se iluminaron con estos fuegos las puntas de las lanzas de sus soldados. Los marinos y los soldados no tienen miedo a los fuegos eléctricos, al contrario, los consideran buena señal, aunque sin ningún fundamento razonable. En las montañas suele ocurrir que la luminosidad eléctrica se manifiesta incluso en las personas, en sus cabellos, gorros, oídos y en todas las partes salientes del cuerpo. Al mismo tiempo suele oírse un susurro parecido al que producían nuestras tijeras.

—Y este fuego, ¿quema mucho?

—No quema nada. Porque no es fuego, sino una luminiscencia, es decir, una luminosidad fría. Tan fría e inofensiva, que con ella ni se puede encender una cerilla. Mira: en vez de las tijeras cojo una cerilla,

Figura 66

y, como puedes ver, su cabeza queda rodeada de luminiscencia eléctrica, pero ella no arde.

—Pues, yo creo que arde: la llama sale de la misma cabeza.

—Enciende la luz y mira la cerilla junto a la lámpara.

Me convencí de que la cerilla no sólo no tenía indicios de carbonización, sino que hasta su cabeza estaba intacta. Había estado, pues, rodeada de luz fría, y no de fuego.

—No apagues la lámpara. El experimento siguiente lo haremos con luz.

Mi hermano puso una silla en medio de la habitación y sobre su espaldar colocó un palo atravesado.

Después de varios intentos logró que el palo, apoyado en un solo punto, descansara sobre el espaldar de la silla sin volcarse.

—Yo no creía que el palo pudiera quedarse así —dije yo—, porque es bastante largo.

—Por eso se sostiene, porque es largo. Si fuera corto no se sostendría. Un lápiz, por ejemplo, no se sostiene.

—Un lápiz, de ninguna manera —afirmé yo.

—Y ahora a lo que íbamos. Sin tocar el palo, ¿puedes hacer que se vuelva hacia tí?

Yo me quedé pensativo.

—Si a uno de sus extremos se le echa un lazo ... —comencé yo.

—Sin ninguna cuerda y sin tocarlo en absoluto. ¿Puedes?

—¡Ah, ya sé!

Acerqué la cara al palo y empecé a absorber aire con la boca, para atraerlo hacia mí. Pero el palo ni se movió.

—¿Qué dices?

—Que es imposible.

—¿Imposible? Ahora veremos.

Y retirando de la estufa el periódico, que durante todo este tiempo estuvo adherido a los azulejos, como si estuviera pegado, comenzó mi hermano a acercarlo lentamente al palo por un lado. A casi medio metro de distancia, el palo percibió la atracción del periódico electrizado y se volvió obedientemente hacia él. Moviendo la hoja de periódico, mi hermano consiguió que el palo lo siguiera, y le hizo girar sobre el espaldar de la silla, primero en un sentido y después en otro.

—Como ves, el periódico electrizado atrae el palo

Figura 67

con tanta fuerza, que éste lo seguirá mientras que toda la electricidad del papel no haya pasado al aire.

—¡Qué lástima que estos experimentos no se pueden hacer en verano! Entonces la estufa está fría.

—La estufa hace falta aquí para secar el papel, porque estos experimentos sólo salen bien cuando el periódico está completamente seco. Y tú te habrás dado cuenta, seguramente, de que el papel de periódico absorbe la humedad del aire, por eso está siempre algo húmedo y hay que secarlo. No creas que en verano es totalmente imposible hacer nuestros experimentos. Pueden hacerse, pero no salen tan bien como en invierno, porque en invierno, en una habitación con calefacción, el aire está mucho más seco que en verano. Y la sequedad tiene mucha importancia para estas experiencias. En verano se seca el periódico sobre la plancha de la cocina, cuando ésta, después de comer, se enfría lo suficiente para que el papel no se queme. Una vez bien seca en la plancha, la hoja de periódico se traslada a una mesa seca y allí se frota fuertemente con un cepillo. El papel se electriza, pero no tan intensamente como cuando se prepara en la estufa de azulejos. Y ... ya está bien por hoy. Mañana haremos otros experimentos.

—¿También eléctricos?

—Sí, y con la misma máquina eléctrica: con el periódico. Mientras tanto te daré a leer un relato interesante acerca de los fuegos de Santelmo en las montañas, del que es autor el célebre naturalista francés Saussure. En 1867 estuvo con varios compañeros en una cumbre de los Alpes, de más de tres kilómetros de altura. Y aquí tienes lo que allí experimentaron.

Mi hermano cogió del estante el libro de Flammarion «La Atmósfera», lo hojeó, y me dio a leer el pasaje siguiente:

«Los que habían realizado la escalada acababan de dejar junto a una peña sus bastones con conteras de hierro y se disponían a comer, cuando Saussure sintió en los hombros y en la espalda un dolor, que parecía estar producido por agujas que se le hincaran lentamente en el cuerpo. «Suponiendo —dice Saussure— que en mi capote habían caído alfileres, me lo quité, pero no sentía alivio, sino, por el contrario, el dolor se hizo más intenso y se extendió a toda la espalda, desde un hombro a otro; este dolor iba acompañado de cosquilleo y de pinchazos dolorosos, como si por mi piel andara una avispa y la llenara de picaduras. Después de quitarme rápidamente mi segundo abrigo, no encontré nada que pudiera producir esta afección. El dolor proseguía y empezó a parecerse a una quemadura. Pensé que se había inflamado mi jersey de lana. Estaba ya dispuesto a desnudarme, cuando me llamó la atención un ruido parecido al abejorreo. Este ruido procedía de nuestros bastones apoyados en la peña; era semejante al ruido que hace el agua caliente en vísperas de arrancar a hervir. Todo esto duraría unos cinco minutos.

Comprendí entonces que la sensación dolorosa era debida al flujo eléctrico procedente de la montaña. Sin embargo, como era de día, no ví ningún resplandor en los bastones. Estos producían el mismo ruido agudo cuando, teniéndolos en la mano, dirigíamos las conteras de hierro hacia arriba, hacia abajo u horizontalmente. Del suelo no salía ningún sonido.

Al cabo de algunos minutos sentí que se me erizaban los pelos de la cabeza y la barba, parecía que me estaban pasando una navaja de afeitar seca por la barba fuerte y crecida. Mi joven ayudante gritó que se le erguían los bigotes y de la parte superior de sus oídos emanaban fuertes corrientes. Al levantar la mano sentí como la corriente salía de mis dedos. En una palabra, la electricidad emanaba de los bastones, de las ropas, de los oídos, de los pelos, de todas las partes salientes del cuerpo.

Abandonamos rápidamente la cumbre de la montaña y descendimos unos cien metros. A medida que íbamos bajando, nuestros bastones emitían cada vez un sonido más débil; por fin, el sonido se hizo tan sordo, que sólo podía oírse llevándose el bastón al oído».

Así termina la narración de Saussure. En el mismo libro leí las descripciones de otros casos de aparición de los fuegos de Santelmo.

«La emanación de electricidad de las peñas prominentes se observa con frecuencia cuando el cielo está cubierto de nubes bajas que pasan a poca altura de las cumbres.

El 10 de julio de 1863, Watson y varios turistas más ascendieron al puerto de Jungfrau (en los montes Suizos). Hacía una mañana magnífica, pero ya cerca del desfiladero, los viajeros tuvieron que aguantar un viento fuerte con pedrisco. Se oyó el horrísono bramar del trueno, y poco después Watson percibió un sonido silbante procedente de su bastón; este sonido era parecido al de un calentador en que se inicia la ebullición. Los viajeros se detuvieron, y notaron que sus bastones y hachas emitían el mismo sonido y no dejaron de sonar ni después de clavar uno de sus extremos en tierra. Uno de los guías, que se quitó el sombrero, comenzó a gritar que le ardía la cabeza. Y, efectivamente, sus cabellos estaban erizados como si los tuviera electrizados. Todos experimentaban sensación de cosquilleo en la cara y en otras partes del cuerpo. Watson tenía los cabellos completamente de punta. En los extremos de los dedos, cuando los movíamos en el aire, se oía el silbido eléctrico».

La danza de los payasos de papel • Las serpientes • Los pelos de punta

Mi hermano cumplió su palabra. Al día siguiente, cuando anocheció, continuó los experimentos. Lo primero que hizo fue «pegar» un periódico a la estufa. Después me pidió un papel más fuerte que el de periódico — de escribir — y empezó a recortar de él figuras graciosas: muñequitos en diversas posturas.

—Estos payasos de papel van a bailar ahora. Trae unos alfileres.

Cada payaso tuvo pronto su alfiler clavado en una pierna.

—Esto es para que los payasos no salgan volando ni sean arrastrados por el periódico —me explicó mi hermano, mientras ponía las figuras de papel en una bandeja—. ¡Atención! ¡El espectáculo va a comenzar!

«Despegó» el periódico de la estufa y, sosteniéndolo horizontalmente con las dos manos, lo acercó, desde arriba, a la bandeja en que estaban las figuras.

—¡Levantaos! —ordenó mi hermano.

Y, figúrese usted, los muñecos le hicieron caso y se levantaron. Se pusieron de pie y así estuvieron hasta que mi hermano retiró el periódico; entonces volvieron a tumbarse. Pero él no los dejó descansar mucho: acercando y alejando el periódico, obligaba a los payasos ya a levantarse ya a acostarse.

—Si no les hubiera puesto los alfileres, serían más livianos, se lanzarían hacia el periódico y se pegarían a él. Mira —mi hermano quitó los alfileres a varias figuras—, han sido atraídas por el periódico y ya no se desprenden. Esto es la *atracción* eléctrica. Y ahora haremos un experimento de *repulsión* ... ¿Dónde has puesto las tijeras?

Yo le dí las tijeras, y mi hermano, después de «pegar» el periódico en la estufa, empezó a cortar de

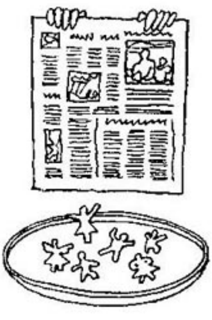


Figura 68

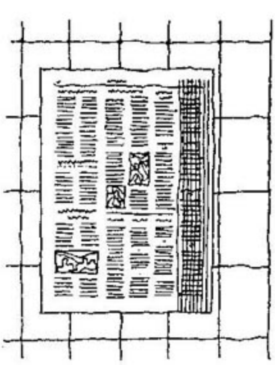


Figura 69

su extremo, de abajo a arriba, una tira larga y estrecha. Sin llegar hasta arriba, comenzó a cortar, del mismo modo, una segunda tira, después una tercera y así sucesivamente. La tira sexta o séptima la cortó del todo. Resultó una especie de plumero de papel que no se deslizó de la estufa, como yo esperaba, sino que siguió adherido a ella. Sujetando la parte superior con la mano, mi hermano pasó varias veces el cepillo por las tiras y luego retiró el «plumero» de la estufa, sosteniéndolo por arriba con el brazo extendido hacia adelante.

Figura 70

En vez de pender libremente hacia abajo, las tiras se separaron formando una especie de campana, repeliéndose sensiblemente unas a otras.

—Se repelen —me explicó mi hermano—, porque todas están igualmente electrizadas. En cambio, se acercarán a los objetos que no estén electrizados. Mete la mano, por abajo, dentro de la campana: las tiras se acercarán a ella.

Me puse en cuclillas y metí la mano en el espacio que había entre las tiras. Es decir, *quise* introducir la mano, pero no pude hacerlo, porque las tiras de papel se enrollaron a ella como si fueran serpientes.

—¿No te asustan estas serpientes? —me preguntó mi hermano.

—Si son de papel, ¿cómo me van a asustar?

—Pues a mí me horrorizan, ¡mira!

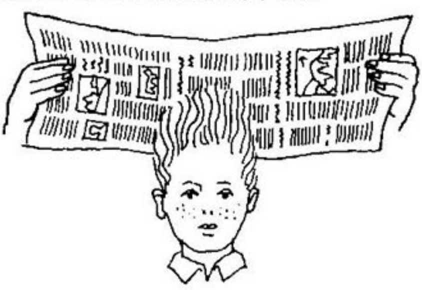


Figura 71

Mi hermano levantó la hoja de periódico hasta tenerla más arriba de la cabeza, y yo pude ver como sus largos cabellos se erizaban.

—¿Esto también es un experimento? ¿Dime, es un experimento o no?

—Es el mismo experimento que acabamos de hacer, pero de otra forma. El periódico ha electrizado mis pelos, y ellos se han sentido atraídos hacia él, al mismo tiempo que se repelían entre sí, lo mismo que las tiras de nuestro «plumero» de papel. Coge un espejo y te enseñaré cómo tus pelos se erguirán lo mismo que los míos.

—Pero, ¿no duele?

—En absoluto.

En efecto, no sentí ni el menor dolor, ni siquiera cosquilleo, y, sin embargo, vi en el espejo cómo, debajo de la hoja de periódico, mis cabellos estaban erizados.

Volvimos a repetir también los experimentos del día anterior, y mi hermano dio por terminada la «sesión», como llamó a nuestro pasatiempo, prometiéndome que al día siguiente haría una serie de experimentos nuevos.

Un rayo pequeño • Experimento con un chorro de agua • Un soplido de gigante

Al día siguiente empezó mi hermano los experimentos haciendo unos preparativos muy raros.

Cogió tres vasos, los calentó junto a la estufa, los puso después sobre la mesa y los tapó con la bandeja, que también calentó previamente acercándola a la estufa.

—¿Qué vas a hacer? —curioseé yo—. ¿Por qué pones la bandeja sobre los vasos, y no los vasos sobre la bandeja?

—Espera, no tengas prisa. Vamos a hacer un experimento con un rayo pequeño.

Mi hermano puso en marcha su «máquina eléctrica», es decir, empezó a frotar la hoja de periódico que había aplicado a la estufa. Una vez frotada, dobló la hoja por la mitad y volvió a frotarla. Luego la «despegó» de la estufa y la depositó rápidamente sobre la bandeja:

—Toca la bandeja, ¿no está fría?

Sin sospechar la mala pasada, alargué despreocupadamente la mano hacia la bandeja y ... la retiré precipitadamente: algo dio un chasquido y sentí un pinchazo en el dedo. Mi hermano se echó a reír.

—¿Qué te parece? Te ha caído un rayo. ¿Has oído el chasquido? Pues, eso fue un trueno pequeño.

—He sentido un pinchazo fuerte, pero no he visto ningún relámpago.

—Ahora lo verás, cuando repitamos el experimento a obscuras.

—Pero yo no quiero volver a tocar la bandeja —declaré yo resueltamente.

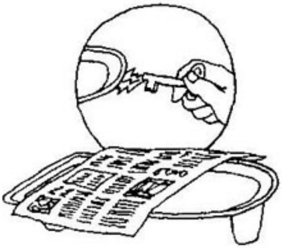


Figura 72

—Y no hace falta que la toques. Puedes hacer saltar la chispa aunque sea con la llave de la puerta o con una cucharilla. No sentirás nada, y las chispas serán igual de largas. Las primeras chispas las haré saltar yo, mientras tus ojos se acostumbran a la obscuridad.

Mi hermano apagó la luz.

—Ahora calla y mira atentamente —dijo en la obscuridad.

Se oyó un chasquido, y simultáneamente saltó una brillante chispa blanco-azulada entre el borde de la bandeja y la llave.

—¿Has visto el relámpago? ¿Has oído el trueno? —me preguntó mi hermano.

—Pero han sido simultáneos. El trueno de verdad se oye siempre después de ver el relámpago.

—Eso es cierto. El trueno lo oímos siempre después de ver el relámpago. Y, sin embargo, se producen al mismo tiempo, lo mismo que el chasquido y la chispa de nuestro experimento.

—¿Y por qué se oye el trueno más tarde?

—Porque el relámpago es luz, y los rayos de luz se propagan tan de prisa, que a través de las distancias que existen en la Tierra pasan casi instantáneamente. El trueno es, en cambio, una explosión, y, como tal, se propaga en el aire mucho más despacio; su ruido se rezaga considerablemente de los rayos de luz y llega a nosotros después que ellos. Por eso vemos el relámpago antes de oír el trueno producido por él.

Mi hermano me dio la llave y, quitando el periódico —mis ojos ya se habían acostumbrado a la obscuridad—, me propuso que hiciera saltar un «rayo» de la bandeja.

—Pero sin el periódico, ¿se producirá la chispa?

—Haz la prueba.

Aún no había tenido tiempo de tocar la llave el borde de la bandeja, cuando vi una chispa larga y brillante.

Mi hermano puso por segunda vez el periódico en la bandeja, y yo volví a hacer saltar una chispa, que resultó ya más débil. Decenas de veces puso él el periódico sobre la bandeja y volvió a retirarlo de ella (sin frotarlo aplicándolo a la estufa), y cada una hice yo que saltara otra chispa, cada vez más débil.

—Las chispas durarían todavía más, si en vez de coger el periódico con las manos, lo cogiera por unos hilos a cintas de seda. Cuando estudies física comprenderás la esencia de lo que aquí ocurre. Mientras tanto, tienes que mirar estos experimentos sólo con los ojos, y no con toda la cabeza. Hagamos ahora otro experimento con un chorro de agua. Lo haremos en la cocina, en el grifo del agua. El periódico se quedará en la estufa hasta que haga falta.

Dejamos salir del grifo un chorrito fino de agua, que, al caer, chocaba sonoramente con el fondo de la pila.

—Ahora voy a hacer que este chorrito, sin tocarlo, corra de otro modo. ¿Hacia dónde quieres que se desvíe, hacia la derecha, hacia la izquierda o hacia adelante?

—Hacia la izquierda —respondí yo sin reflexionar.

—Está bien. No toques el grifo que ahora traigo el periódico.

Regresó mi hermano con el periódico, procurando sujetarlo con los brazos extendidos, lo más lejos posible

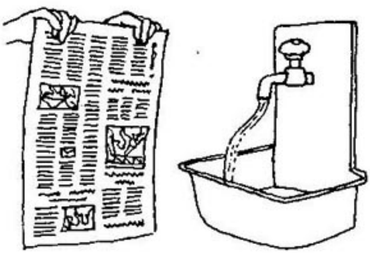


Figura 73

de su cuerpo, para que perdiera menos electricidad. Acercó el periódico al chorro, por la parte izquierda, y vi claramente como el hilo de agua se torcía a la izquierda. Trasladando el papel al lado contrario, hizo que el chorro se desviara hacia la derecha. Finalmente, le obligó a torcerse tanto hacia adelante, que el agua pasó por encima del borde de la pila.

—¿Ves con qué fuerza influye aquí la acción atrayente de la electricidad? Este experimento puede hacerse también fácilmente sin estufa ni plancha, si se utiliza un peine de caucho, como éste —dijo mi hermano, sacando un peine del bolsillo lateral y pasándolo por sus tupidos cabellos—. De este modo ya lo he electrizado.

—¡Pero si tus pelos no son eléctricos!

—Claro que no. Son pelos ordinarios, como los tuyos y los de otro cualquiera. Pero si el caucho se frota con los cabellos, se electriza, lo mismo que el periódico con las cerdas del cepillo de la ropa. ¡Mira!

Aproximó el peine al chorro y éste se desvió sensiblemente hacia un lado.

—Para los otros experimentos no sirve el peine: en él se obtiene demasiada poca electricidad, mucha menos que con la «máquina eléctrica» que, como te habrás convencido, es fácil hacer con una simple hoja de papel de periódico. Y a propósito, quiero hacer con el periódico otro experimento, el último, pero no eléctrico, sino otra vez acerca de la presión del aire, como el que hicimos con la desafortunada regla.

Regresamos a la habitación. Ya en ella, mi hermano se puso a recortar y pegar una hoja de periódico, de modo que resultó una bolsa larga.

—Mientras se seca nuestra bolsa, trae varios libros grandes y pesados.

Yo busqué en el estante tres voluminosos tomos de cierto atlas de anatomía y los puse sobre la mesa.

—¿Puedes inflar esta bolsa con la boca? —me preguntó mi hermano.

—Claro que puedo —repuse yo.

—La cosa es fácil, ¿no es verdad? Pero, ¿y si aplastamos la bolsa con un par de libros de éstos?

—Ah, entonces por mucho que te empeñes no inflarás la bolsa.

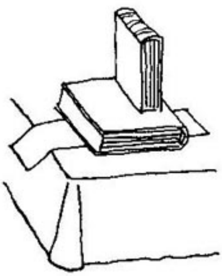


Figura 74

Mi hermano, sin decir palabra, puso la bolsa al borde de la mesa, le colocó encima un tomo y, sobre él, puso otro tomo de pie.

—Ahora fíjate. Lo voy a inflar.

—¿No querrás soplar estos libros? —le dije riéndome.

—Pues, sí, eso es lo que pienso hacer.

Mi hermano se puso a inflar la bolsa. ¿Y qué piensa usted? El libro que estaba debajo se inclinó, levantado por la presión del aire en la bolsa, y tiró al que tenía encima. Y, sin embargo, pesarían unos cinco kilos.

Sin esperar a que yo saliera de mi admiración, mi hermano se dispuso a repetir el experimento. Esta vez cargó la bolsa con tres tomos. Sopló y —¡qué soplido de gigante!— volcó los tres tomos.

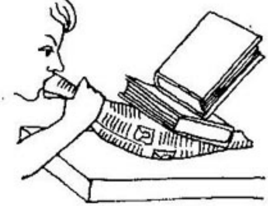


Figura 75

Lo más asombroso de todo es, que en este insólito experimento no intervenía nada extraordinario. Cuando yo mismo me atreví a hacerlo, conseguí volcar los libros con la misma facilidad que mi hermano. No hay que tener pulmones de elefante ni músculos de gigante: todo ocurre de por sí, casi sin hacer esfuerzo.

Mi hermano me explicó después el quid del fenómeno. Cuando inflamos la bolsa de papel, introducimos en ella aire más comprimido que el circundante, porque de lo contrario no se inflaría. La presión del aire exterior es igual aproximadamente a 1000 g por cada centímetro cuadrado. Calculando cuántos centímetros cuadrados de papel hay debajo de los libros, es fácil determinar que aunque el exceso de presión constituya solamente la décima parte, es decir, nada más que un centenar de gramos por cada centímetro cuadrado, la presión total que ejerce el aire, desde dentro, sobre la parte oprimida de la bolsa puede alcanzar casi 10 kg. Esta fuerza, como es natural, es suficiente para volcar los libros.

Con esto se acabaron nuestros experimentos físicos con la hoja de papel de periódico.

¿Cómo pesar bien en balanzas inexactas?

¿Qué es más importante, tener una buena balanza o tener unas buenas pesas? Hay muchos que piensan que lo más importante es la balanza, pero, en realidad, lo esencial son las pesas. Sin pesas buenas es imposible pesar bien; pero si éstas son buenas, hasta en una mala balanza se puede pesar con bastante precisión.

Por ejemplo, tiene usted una balanza de cruz y platillos, pero duda de su exactitud. En este caso, cuando tenga que pesar, haga lo siguiente. No ponga de inmediato el objeto que desea pesar, sino coloque previamente en uno de los platillos otro peso cualquiera más pesado que dicho objeto y en el otro platillo ponga tantas pesas como sean necesarias para establecer el equilibrio.

Hecho esto, coloque usted su objeto en el platillo en que están las pesas. Como es lógico, la balanza se inclinará hacia este lado, y para restablecer el equilibrio habrá que quitar parte de las pesas. Las pesas quitadas indicarán el peso exacto del objeto. La explicación es comprensible: su objeto tira ahora del platillo con la misma fuerza que antes tiraban las pesas, por lo tanto, el peso de éstas es exactamente igual al de aquél.

Este magnífico procedimiento de pesar correctamente en balanzas inexactas fue ideado por el gran químico ruso D. I. Mendeléiev.

En la plataforma de una báscula

De pie en la plataforma de una báscula en equilibrio está un hombre, que, de repente, se pone en cuclillas. ¿Hacia dónde se desplazará en este instante la plataforma, hacia abajo o hacia arriba?

La plataforma oscilará hacia arriba. ¿Por qué? Porque, cuando nos ponemos en cuclillas, los músculos que arrastran nuestro tronco hacia abajo, tiran de nuestras piernas hacia arriba; por esto disminuye la presión del cuerpo sobre la plataforma y ésta debe desplazarse hacia arriba.

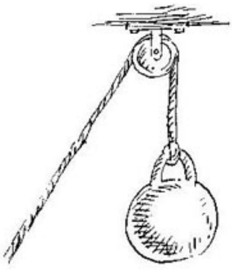


Figura 76

El peso en la polea

Supongamos que un hombre puede levantar del suelo un peso de 100 kg. Queriendo levantar un peso todavía mayor, ató a éste una cuerda y la hizo pasar por una polea fija en el techo. Mire la figura 76. ¿Qué peso conseguirá levantar valiéndose de este dispositivo?

El peso máximo que se puede levantar con ayuda de una polea fija no es mayor que el que se levanta directamente con las manos, sino incluso menor. Cuando yo tiro de la cuerda que pasa por una polea fija, puedo levantar un peso que no sea mayor que el de mi propio cuerpo. Si peso menos de 100 kg, me será imposible levantar este peso valiéndome de la polea.

Las dos gradas

Con frecuencia se confunde el *peso* con la *presión*. Sin embargo no son una misma cosa. Un objeto puede pesar mucho y ejercer sobre su apoyo una presión insignificante. contrario, hay objetos que pesan Y, al poco, pero que ejercen sobre su apoyo una gran presión.

El ejemplo que sigue le permitirá comprender bien la diferencia que hay entre peso y presión, y al mismo tiempo aprenderá cómo hay que calcular la presión que ejerce un objeto sobre su apoyo.

En un campo trabajan dos gradas (rastras) cuyas estructuras son iguales: una de ellas tiene 20 dientes y la otra, 60. La primera, junto con la carga, pesa 60 kg, la segunda, 120.

¿Qué grada hace los surcos más profundos?

Es fácil comprender que penetrarán más en la tierra los dientes de aquella grada sobre los cuales presiona una fuerza mayor. En la primera grada la carga total, de 60 kg, se reparte entre 20 dientes; por consiguiente, sobre cada diente actúa una carga de 3 kg. En la segunda grada, sobre cada diente actúan nada más que $^{120}/_{60}$, es decir, 2 kg. Esto quiere decir, que aunque la segunda grada es en total más pesada que la primera, sus dientes deben penetrar menos en el terreno. La presión sobre cada diente es mayor en la primera grada que en la segunda.

La col en salmuera

Consideremos otro cálculo fácil de la presión.

Dos tinas llenas de coles en salmuera están tapadas por sendos redondeles de madera, que descansan sobre las coles y tienen encima unas piedras. En una de las tinas el redondel tiene 24 cm de diámetro y la carga que hay sobre él es de 10 kg; el diámetro del redondel de la otra cuba es de 32 cm y la carga, de 16 kg.

¿En qué tina están sometidas a mayor presión las coles?

La presión será mayor, evidentemente, en la tina en que a cada centímetro cuadrado de superficie le corresponda mayor carga. En la primera tina el peso de 10 kg se reparte sobre una superficie[1]) de $3{,}14 \times \times 12 \times 12 = 452$ cm^2 y, por lo tanto, a 1 cm^2 le corresponden $^{10000}/_{452}$, es decir, cerca de 22 g. En la segunda tina la presión sobre 1 cm^2 constituye $^{16\,000}/_{804}$, o sea, menos de 20 g. Por consiguiente, en la primera tina las coles están sometidas a mayor presión.

La lezna y el cincel

¿Por qué penetra más profundo la lezna que el cincel, cuando sobre ambas herramientas se aprieta con la misma fuerza?

La causa es la siguiente. Cuando se aprieta sobre la lezna, toda la fuerza se concentra en el espacio pequeñísimo de su punta. En cambio, cuando se aprieta sobre el cincel, la misma fuerza se reparte sobre una superficie mucho mayor. Supongamos, por ejemplo, que la lezna entra en contacto con el material en una superficie de 1 mm^2, mientras que el cincel, en una superficie de 1 cm^2. Si la fuerza que se ejerce sobre cada herramienta es igual a un kilogramo, el material que se halla bajo la cuchilla del cincel experimentará la presión de 1 kg por cm^2, mientras que el que está debajo de la lezna sufrirá la presión de $1 : 0{,}001 = 100$, es decir, 100 kg por 1 cm^2 (puesto que 1 mm^2 = 0,01 cm^2). La presión debajo de la lezna es un centenar de veces mayor que la que existe debajo del cincel; está claro, pues, por qué la lezna penetra más que el cincel.

---

[1]) La superficie o área del círculo es igual al número 3,14 multiplicado por la longitud del radio de su circunferencia (o por la mitad de su diámetro) y otra vez por la longitud de dicho radio.

Ahora comprenderá que cuando empuja con el dedo a una aguja, al coser, efectúa usted una gran presión, que no es menor que la que ejerce el vapor en algunas calderas. Este es también el secreto de por qué corta la navaja de afeitar: la ligera fuerza que hace la mano, crea en el filo de la navaja la presión de centenares de kilogramos por centímetro cuadrado que corta la barba.

El caballo y el tractor

Es frecuente que un pesado tractor de orugas se mantenga bien en un suelo tan mullido, que se hundan en él las patas de los caballos y los pies de las personas. Esto le parece incomprensible a algunos, porque el tractor pesa mucho más que un caballo y muchísimo más que un hombre. ¿Por qué se hunden las patas del caballo en la tierra mullida y no se hunde el tractor?

Para comprender esto hay que volver a recordar la diferencia entre *peso* y *presión*.

Debe hundirse más no el objeto que más pesa, sino aquél sobre cada centímetro cuadrado de apoyo del cual recae mayor carga. Enorme peso del tractor se reparte por la gran superficie de sus orugas. Por esto, a cada centímetro cuadrado de apoyo del tractor le corresponde solamente alrededor de un centenar de gramos. En cambio, el peso del caballo se distribuye por la pequeña superficie que hay debajo de sus herraduras, por lo que a cada centímetro cuadrado de apoyo le corresponden más de 1000 g, es decir, diez veces más que en el caso del tractor. No es extraño, pues, que las patas del caballo se hinquen en la tierra y se hundan más que el pesado tractor de orugas. Algunos lectores habrán tenido ocasión de ver cómo, para pasar por sitios cenagosos, se calzan los caballos con anchos «zapatones» (raquetas), que aumentan la superficie de apoyo de los cascos y el caballo se hunde mucho menos.

A rastras por el hielo

Si el hielo que hay sobre un río o lago no ofrece seguridad, los expertos pasan por él no a pie, sino a rastras. ¿Por qué hacen esto?

Cuando una persona se tumba, su peso, como es natural, no disminuye, pero la superficie en que se apoya aumenta y sobre cada centímetro cuadrado recae una carga menor. En otras palabras, la presión que ejerce la persona sobre su apoyo, disminuye.

Ahora está claro por qué, cuando el hielo es delgado, resulta más seguro pasarlo a rastras, porque la presión sobre él disminuye. Con esto mismo fin se utiliza una tabla ancha, en la cual se tiende uno cuando tiene que pasar por una capa delgada de hielo.

¿Qué carga puede soportar el hielo sin quebrarse? La cantidad de carga depende, claro está, del espesor del hielo. Una capa de hielo de 4 cm de espesor resiste el peso de una persona andando. Conviene saber qué espesor debe tener el hielo para que pueda hacerse una pista de patinar sobre un río o lago. Para esto es suficiente que el hielo tenga un espesor de 10—12 cm.

¿Por dónde se romperá la cuerda?

Construya usted un artificio como el que se ve en la fig. 77. Ponga un palo sobre las hojas de una puerta abierta, sujete a él una cuerda de cuya parte media penda un libro pesado y ate al extremo inferior de ésta una regla. Si tiramos ahora de la cuerda desde el extremo en que está la regla, ¿por dónde se romperá, por encima del libro o por debajo de él?

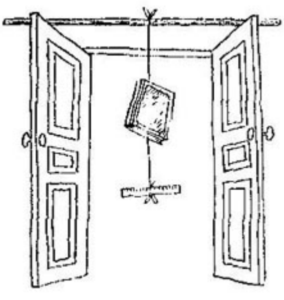


Figura 77

La cuerda puede romperse por encima del libro y por debajo de él, según como se tire de ella. De usted depende conseguir lo uno o lo otro. Si se tira con cuidado, se romperá la parte *superior* de la cuerda; si se da un tirón brusco, se romperá la parte *inferior*.

¿Por qué ocurre esto? Cuando la cuerda se tensa con cuidado se rompe por la parte superior, porque sobre ella, además de la fuerza de la mano, actúa el peso del libro; mientras que en la parte inferior de la cuerda sólo actúa la fuerza de la mano. Otra cosa es lo que sucede cuando se da un tirón rápido: en el corto intervalo de tiempo que dura el tirón, el libro no tiene tiempo de recibir un movimiento apreciable; por esto la parte superior de la cuerda no se estira, y toda la fuerza recae sobre su parte inferior, que se rompe incluso si es más gruesa que la superior.

La tira rasgada

Una tira de papel de un palmo de longitud y un dedo de anchura puede servir de material para un problema entretenido. Corte o rasgue la tira en dos puntos (fig. 78) y pregúntele a un camarada qué ocurrirá con ella si se tira de sus extremos en sentidos distintos.

—Se romperá en los puntos en que está rasgada —responderá él.

Figura 78

—¿En cuántas partes?

Por lo general contestan que en tres. Después de recibir esta contestación, propóngale a su camarada que haga la prueba. Se convencerá con sorpresa de su error: la tira se rompe en dos partes nada más.

Este experimento puede repetirse tantas veces como se quiera, tomando tiras de distintos tamaños y haciendo rasgaduras de diferente profundidad, pero nunca se conseguirá obtener más de dos trozos. La tira se rompe por donde es más débil, confirmando el refrén: «por lo más delgado se rompe la soga». El secreto está en que en los dos cortes o rasgaduras, por mucho que se procure hacerlos iguales, uno será inevitablemente más profundo que el otro, aunque esto no se note a simple vista. Esta parte de la tira, como es la más débil, comenzará a romperse primero. Y una vez que empiece a romperse, se romperá hasta el fin, ya que cada vez se debilita más. Seguramente se sentirá usted satisfecho cuando sepa que al hacer este simple experimento ha entrado en una rama de la ciencia muy seria e importante para la técnica. Esta rama de la ciencia se llama «resistencia de materiales».

Una caja de cerillas fuerte

¿Qué le ocurre a una caja de cerillas vacía, si se le da un puñatazo fuerte? Estoy seguro que de 10 lectores, nueve dirán que la caja se rompe. El décimo —que habrá hecho él mismo este experimento o que habrá oído hablar de él— pensará de otro modo: la caja quedará intacta.

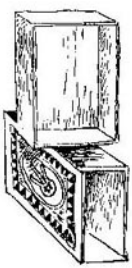


Figura 79

El experimento debe hacerse de la manera siguiente. Se colocan las dos partes de la caja vacía una sobre otra, como puede verse en la fig. 79. Se da un puñatazo fuerte y seco sobre esta disposición. Y lo que ocurre es sorprendente: las dos partes de la caja salen despedidas hacia los lados, pero cuando las recogemos podemos comprobar que ambas están indemnes. La caja flexiona mucho, y esto la salva: se cimbra, pero no se rompe.

Acercar soplándole

Ponga sobre la mesa una caja de cerillas vacía y propóngale a cualquiera que la aleje de sí soplándole. Esto, como es natural, lo hará sin dificultad. Entonces propóngale hacer lo contrario, es decir, hacer que, soplándole, la caja *se acerque* al que le sopla. En este caso no se permite echar la cabeza hacia adelante para

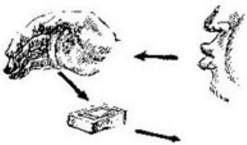


Figura 80

soplarle a la caja por detrás. No es probable que sean muchos los que se den cuenta de lo que hay que hacer. Algunos intentarán mover la caja *absorbiendo* el aire, pero, claro está, que inútilmente. Sin embargo, el secreto es bien sencillo.

¿En qué consiste?

Pídale a alguien que ponga una mano de canto detrás de la caja y sóplele a esta mano. El chorro de aire será rechazado por la mano, chocará con la caja y le empujará en dirección a usted (fig. 80).

Este experimento, como suele decirse, «no falla». Lo único que hay que procurar es hacerlo en una mesa suficientemente lisa (aunque no esté barnizada) y, claro está, sin mantel.

El reloj de péndola

Un reloj de péndola atrasa. ¿Qué hay que hacer con su péndulo para que el reloj marche bien? Y, ¿qué habría que hacer en el caso de que se adelantase?

Cuanto más corto es un péndulo, más de prisa oscila; esto es fácil de comprobar haciendo el correspondiente experimento con un peso atado a una cuerda. De aquí se deduce la solución de nuestro problema: cuando un reloj de péndola *atrasa*, hay que, haciendo subir la lenteja por la varilla del péndulo, *acortar* éste un poco y, de este modo, conseguir que la péndola oscile más de prisa; por el contrario, si el reloj *adelanta*, hay que *alargar* un poco el péndulo.

¿En qué posición se parará la varilla?

En los extremos de una varilla se fijan dos esferas de igual peso (fig. 81). Exactamente en la mitad de esta varilla se ha taladrado un orificio, a través del cual pasa una aguja de hacer punto. Si la varilla se hace girar alrededor de la aguja, da varias vueltas y se para.

¿Puede usted decir de antemano en qué posición se parará la varilla?

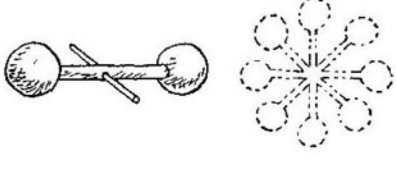


Figura 81

Los que piensen que la varilla se parará siempre en posición horizontal, se equivocan. La varilla puede mantenerse en equilibrio en cualquier posición (véase la fig. 81), horizontal, vertical u oblicuamente, puesto que se apoya en su centro de gravedad. Todo cuerpo que descanse sobre su centro de gravedad o que penda de él, conserva su equilibrio en cualquier posición.

Por esta razón, es imposible decir a priori qué posición tomará la varilla cuando deje de dar vueltas.

El salto en un vagón

Un tren marcha a la valocidad de 36 km por hora. Usted va en uno de los vagones y da un salto hacia arriba. Supongamos que logra permanecer en el aire un segundo (suposición bastante optimista, porque para esto tendría que subir más de un metro). ¿Dónde caerá usted al volver al suelo, en el sitio de que saltó o en otro? Si cae en otro sitio, ¿de qué pared del vagón resultará estar más próximo este sitio que el inicial, de la delantera o de la trasera?

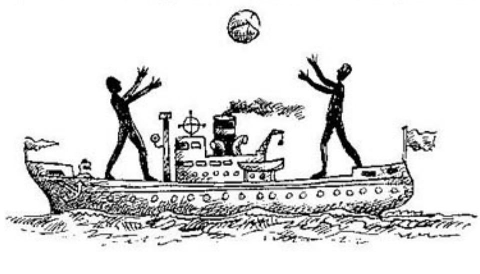
Caerá usted en el mismo sitio de que saltó. No hay que pensar que, mientras usted estuvo en el aire, el suelo, junto con el vagón, al avanzar rápidamente le adelantó. El vagón claro está corrió hacia adelante, pero usted también avanzó por inercia y con la misma velocidad, es decir, mientras usted estuvo en el aire se encontró todo el tiempo sobre el punto de que saltó.

En el barco

Dos jóvenes juegan a la pelota en la cubierta de un barco en marcha (fig. 82). Uno de ellos está más cerca de la popa y el otro, más cerca de la proa. ¿A cuál le es más fácil hacer que la pelota llegue hasta su compañero, al primero o al segundo?

Si el barco navega a velocidad uniforme y en línea

Figura 82



recta, a los dos jóvenes les es igual de fácil hacer que la pelota llegue hasta su compañero —lo mismo que si el barco no se moviera. No debe pensarse que el jóven que está más cerca de la proa se aleja de la pelota lanzada, mientras que el que se halla más cerca de la popa se mueve al encuentro de dicha pelota. La pelota, por inercia, tiene la velocidad con que se mueve el barco; la velocidad del barco se comunica en igual medida a los jugadores y a la pelota en el aire. Por esto el movimiento del barco (uniforme y rectilíneo) no le da ventaja a ninguno de los jugadores frente al otro.

Las banderas

Un globo es arrastrado por el viento en dirección norte. ¿Hacia qué lado tenderán las banderas que hay en su barquilla?

El globo arrastrado por la corriente de aire se halla en reposo con respecto al aire que lo rodea, por lo tanto, las banderas no serán extendidas por el viento hacia ningún lado y penderán lo mismo que cuando el aire está en calma.

En un aeróstato

Un globo aerostático se mantiene libre e inmóvil en el aire. De su barquilla sale un nombre y empieza a subir por un cable.

¿Hacia dónde se desplazará en este caso el globo, hacia arriba o hacia abajo?

El aeróstato deberá desplazarse hacia *abajo*, porque el hombre, al subir por el cable, le empuja a éste, y al globo, en sentido contrario. Aquí ocurre lo mismo que cuando una persona anda por el fondo de una barca: la barca se mueve en este caso hacia atrás.

Andar y correr

¿En qué se diferencia el andar del correr?

Antes de responder a esta pregunta conviene recordar que se puede correr más despacio que se anda e incluso sin moverse del sitio.

El correr se distingue del andar no por la velocidad del movimiento. Al andar, nuestro cuerpo tiene siempre en contacto con la tierra algún punto de los pies. Al correr hay instantes en que nuestro cuerpo se separa completamente de la tierra y no tiene en contacto con ella ni un solo punto.

Un palo que se autoequilibra

Sobre los dedos índices de ambas manos, separadas, ponga un palo liso del modo que indica la fig. 83. Hecho esto, vaya acercando entre sí dichos dedos hasta que se junten. ¡Qué cosa más rara! Resulta que en esta posición final el palo no se cae, sino que conserva el equilibrio. Repita este experimento muchas veces variando la posición inicial de los dedos y verá que el resultado es siempre el mismo: el palo está en equilibrio. Si se sustituye el palo por una regla de dibujo, un bastón, un taco de billar o un cepillo de barrer, observará la misma peculiaridad.

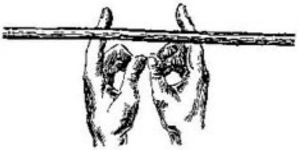


Figura 83

¿En qué consiste el secreto de este resultado tan inesperado?

En primer lugar está claro lo siguiente: como quiera que el palo se encuentra en equilibrio cuando los dedos están juntos, quiere decir que éstos se juntan debajo del centro de gravedad del palo (puesto que un cuerpo permanece en equilibrio si la vertical trazada por su centro queda dentro de los límites de su apoyo).

Cuando los dedos están separados soporta mayor carga el dedo que está más próximo al centro de gravedad del palo. Pero al aumentar la presión aumenta también el rozamiento; por lo tanto, el dedo que se encuentra más cerca del centro de gravedad experimenta mayor rozamiento que el que está más lejos. Por esto, el dedo más cercano al centro de gravedad no se desliza por debajo del palo; el único que se mueve siempre es el dedo que está más lejos de este punto. En cuanto el dedo que se mueve resulta más próximo al centro de gravedad que el otro, los dedos cambian entre sí de papeles; estos cambios se suceden varias veces, hasta que los dedos se juntan. Y como cada vez sólo se mueve uno de los dedos (el que está más lejos del centro de gravedad) es natural que en la posición final se encuentren ambos debajo de dicho centro.

Antes de dar por terminado este experimento, repítalo usted con un cepillo de barrer (fig. 84, a la izquierda) y plantéese la siguiente pregunta: si cortara el palo del cepillo por el sitio en que se apoya en los dedos y colocara las dos partes en los platillos de una balanza (fig. 84, a la derecha), ¿cuál de los platillos bajaría, el del palo o el del cepillo?

Al parecer, como las partes del cepillo se equilibraban entre sí cuando descansaban sobre los dedos, deberán equilibrarse también cuando estén en los platillos de la balanza. Pero en realidad baja el platillo en que está el cepillo. La causa de que esto ocurra no es difícil de comprender, si se tiene en cuenta que, cuando el cepillo estaba en equilibrio sobre los dedos, las fuerzas (pesos) correspondientes a sus dos partes estaban aplicadas a brazos de palanca diferentes, mientras que en el

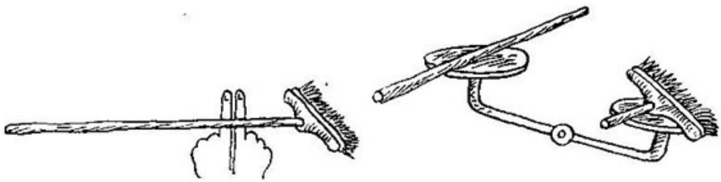


Figura 84

caso de la balanza estas mismas fuerzas (pesos) están aplicadas a los extremos de una palanca de brazos iguales.

Por encargo mío, para el «Pabellón de Ciencia Recreativa» del parque de Leningrado, se fabricó un juego de palos cuyos centros de gravedad se encontraban en diferentes sitios. Estos palos podían dividirse en dos partes (desiguales por lo general) precisamente por el lugar en que estaba el centro de gravedad.

Al poner estas partes en la balanza, los visitantes se convencían asombrados de que la parte corta pesaba más que la larga.

El remero en el río

Por un río navega una barca de remos y junto a ella, una astilla. ¿Qué le será más fácil al remero, adelantar 10 m a la astilla o rezagarse de ella la misma distancia?

Hasta aquellos que practican el deporte del remo suelen dar a esta pregunta una respuesta errónea: les parece que remar contra la corriente es más difícil que a favor de ella; por consiguiente, según ellos, es más fácil adelantar a la astilla que quedarse rezagado de ella.

Es verdad, indudablemente, que atracar a cualquier punto de la margen remando contra la corriente es más difícil que hacerlo remando a favor de ella. Pero si el punto a que desea llegar navega al mismo tiempo que usted, como la estilla por el río, el problema cambia esencialmente.

Hay que tener en cuenta que la barca, movida por la corriente, se halla *en reposo* con respecto al agua que la lleva. Sentado en esta barca el barquero rema exactamente lo mismo que en las tranquilas aguas de un lago. En un lago es igual de fácil remar en cualquier dirección; lo mismo ocurrirá en el agua corriente en nuestras condiciones.

Así, pues, el trabajo que tendrá que hacer el remero será el mismo si quiere adelantar a la astilla flotante como si quiere rezagarse de ella a la misma distancia.

Las circunferencias en el agua

Una piedra lanzada a un agua quieta origina ondas, es decir, circunferencias que se dispersan.

¿Qué forma toman las ondas producidas por una piedra lanzada al agua corriente de un río?

Si no se sabe abordar correctamente este problema, es fácil perderse en los razonamientos y llegar a la conclusión de que, en el agua corriente, las ondas deben alargarse y tomar la forma de elipse o de óvalo, achatado al encuentro de la corriente. Sin embargo, si se observan atentamente las ondas producidas por una piedra lanzada a un río, no se nota ninguna alteración de la forma circular por muy rápida que sea la corriente.

Aquí no hay nada inesperado. Un simple razonamiento nos lleva a la conclusión de que las ondas producidas por la piedra lanzada deben ser circulares tanto en el agua quieta como en la corriente. Vamos a considerar el movimiento de las partículas del agua agitada como resultado de dos movimientos: uno radial, que parte del centro de oscilación, y otro de traslación, en la dirección de la corriente del río. Un cuerpo que participa en varios movimientos se traslada, en fin de cuentas, hacia el punto en que se encontraría si efectuara sucesivamente todos los movimientos componentes, uno después de otro.

Por esto, supongamos primeramente que la piedra ha sido lanzada en un agua quieta. En este caso está claro que las ondas que se producen son circulares.

Figurémonos ahora que el agua se mueve, sin prestar atención a la velocidad y al carácter uniforme o variado de dicho movimiento, siempre que sea de traslación. ¿Qué ocurrirá con las ondas circulares? Se desplazarán por traslación paralela sin experimentar deformación alguna, es decir, seguirán siendo circulares.

La desviación de la llama de la vela

Al trasladar una vela encendida de un sitio a otro de una habitación notamos que, al empezar a moverla, su llama se desvía hacia atrás. ¿Hacia dónde se desviará si la vela que se traslada está dentro de un farol cerrado? ¿Hacia dónde se desviará la llama, dentro del farol, si hacemos que éste dé vueltas alrededor nuestro teniéndolo sujeto con el brazo extendido?

Los que piensen que la llama de una vela, que esté dentro de un farol cerrado, no se desviará en absoluto al mover el farol, se equivocan. Haga usted el experimento con una cerilla encendida y se convencerá de que si se traslada protegiéndola con la mano, la llama se desviará no hacia atrás, sino hacia adelante. La causa de que se desvíe hacia adelante es, que la llama posee menos densidad que el aire que la rodea. Una misma fuerza le comunica más velocidad a un cuerpo de masa menor que a otro de mayor masa. Por esto, como la llama que se mueve dentro del farol se mueve más de prisa que el aire, se desvía hacia adelante.

Esta misma razón —la menor densidad de la llama que la del aire circundante— explica el inesperado comportamiento de la llama cuando el farol se mueve circularmente. En este caso la llama se desvía *hacia dentro*, y no hacia fuera como sería de esperar. Este fenómeno se comprende claramente recordando cómo se sitúan el mercurio y el agua dentro de una esfera sometida a rotación en una máquina centrifugadora: el mercurio se sitúa más lejos del eje de rotación que el agua; esta última parece emerger del mercurio, si se considera «hacia abajo» el sentido que se aleja del eje de rotación (es decir, la dirección en que caen los cuerpos sometidos a la acción del efecto centrífugo). Como la llama es más liviana que el aire que la rodea, emerge del aire, es decir, se dirige hacia el eje de rotación.

La cuerda combada

¿Con qué fuerza hay que tensar una cuerda tendida para que no se combe?

Por mucho que se tense la cuerda, se combará inevitablemente. La fuerza de la gravedad que produce la comba está dirigida verticalmente, mientras que la tensión de la cuerda no tiene dirección vertical. Estas dos fuerzas no pueden equilibrarse nunca, es decir, su resultante nunca puede ser nula. Esta resultante es la que hace que se combe la cuerda.

Por muy grande que sea el esfuerzo que se haga, será imposible tensar la cuerda de modo que quede completamente recta (excepto en los casos en que su dirección sea vertical). La comba es inevitable; su magnitud puede disminuirse hasta cierto grado, pero no puede anularse. Así, pues, toda cuerda tendida no verticalmente, lo mismo que toda correa de transmisión, debe combarse.

Por el mismo motivo es imposible atirantar una hamaca de modo que sus cuerdas queden horizontales. La tela metálica fuertemente atirantada del somier de una cama se comba bajo el peso de la persona que en él descansa. Pero la hamaca, cuyas cuerdas se tensan con mucha menos fuerza, al acostarse una persona en ella se convierte en un saco colgante.

¿Hacia dónde hay que tirar la botella?

¿Hacia dónde hay que tirar la botella desde un vagón en marcha para que sea menor el peligro de que se rompa al chocar con la tierra?

Como cuando se salta de un vagón en marcha es más seguro hacerlo hacia adelante, en el sentido del movimiento, puede parecer que la botella chocará con el suelo más suavemente si se la tira hacia adelante. Pero esto es un error: las cosas hay que tirarlas *hacia atrás*, en sentido contrario al movimiento del tren. En este caso la velocidad que se le comunica a la botella al tirarla será *negativa* con respecto a la que dicha botella posee por inercia; como resultado de esto, la botella llegará a tierra con menos velocidad. Si se tirase hacia adelante ocurriría lo contrario: las velocidades se sumarían y el golpe sería más fuerte.

El hecho de que para las personas sea menos peligroso saltar hacia adelante, y no hacia atrás, se explica con otras razones: si caemos hacia adelante nos hacemos menos daño que si caemos de espaldas.

El corcho

En una botella con agua ha caído un trocito de corcho. Este trocito es lo suficientemente pequeño para poder pasar libremente por el cuello de la botella. Pero por mucho que usted incline la botella o la invierta, el agua que sale no saca al trozo de corcho. Sólo cuando la botella se vacía por completo, el corcho sale con la última porción de agua. ¿Por qué ocurre esto? El agua no hace salir al corcho por la sencilla razón de que éste es más liviano que ella y, por lo tanto, se mantiene siempre en su superficie. El corcho solamente puede encontrarse abajo, es decir, junto al orificio de la botella, cuando ya haya salido casi toda el agua. Por esto sale de la botella con la última porción de agua.

Durante las crecidas

Durante las crecidas vernales las superficies de los ríos se hacen convexas, es decir, el nivel del agua es más alto en el centro que en las márgenes. Si por un río «hinchado» de este modo va flotando leña suelta, los maderos se deslizan hacia las orillas del río, su parte central queda, en cambio, libre (fig. 85, a la izquierda). En el estiaje, es decir, cuando el nivel del agua es más bajo, la superficie del río se hace cóncava, siendo más baja en el centro que en las márgenes; y entonces los maderos flotantes se concentran en medio del río (fig. 85, a la derecha).

Figura 85

¿Cómo se explica esto?

¿Por qué durante las crecidas se hace el río convexo y durante el estiaje, cóncavo?

La causa de que esto ocurra es, que por el centro del río el agua corre siempre más de prisa que junto a las márgenes, porque el rozamiento del agua con estas últimas retarda la corriente. Durante las crecidas, el agua viene del curso superior y con mayor rapidez a lo largo del centro del río que cerca de las orillas, puesto que la velocidad de la corriente es mayor en el centro. Está claro que si a lo largo de la línea media del río llega más agua, el río tendrá que «hincharse» en este sitio. Durante el estiaje, cuando el agua disminuye, como la corriente es más rápida en el centro del río, la cantidad de agua que sale por él es mayor que la que pasa por las orillas, y el río se hace cóncavo.

Los líquidos empujan . . . ¡hacia arriba!

El hecho de que los líquidos presionen hacia abajo, sobre el fondo de la vasija que los contiene, y hacia los lados, sobre las paredes de la misma, es conocido hasta por aquellos que nunca han estudiado física. Pero son muchos los que ni sospechan que los líquidos empujan también hacia *arriba*. El tubo de vidrio de una lámpara de petróleo le ayudará a convencerse de que este empuje hacia arriba existe en realidad. Recorte un redondel de cartón fuerte cuyas dimensiones permitan tapar el orificio del tubo. Aplique este redondel a los bordes del tubo y sumérjalo en agua. Para evitar que el redondel se desprenda al meter el tubo en el agua, puede sujetarse con un hilo que pase por su centro o simplemente con un dedo. Una vez introducido el tubo hasta una determinada profundidad, verá usted que el redondel se sostiene perfectamente solo, sin que lo sujete la presión del dedo ni la tensión del hilo. Es el agua, que empuja de abajo a arriba, lo que lo aprieta contra el tubo.

Usted puede incluso medir el valor de esta presión ejercida hacia arriba. Para esto, eche con precaución agua en el tubo: en cuanto el nivel de aquélla dentro de éste se aproxima al del agua en la vasija, se desprende el redondel. Esto quiere decir, que la presión que el agua ejerce, desde abajo, se equilibra con la presión que ejerce por arriba una columna de agua cuya altura es igual a la profundidad a que se halla sumergido el redondel en el agua. Esta es la ley de la presión de los líquidos sobre cualquier cuerpo sumergido en ellos. De aquí se deduce la «pérdida» de peso que experimentan los cuerpos sumergidos en líquidos, de que nos habla el célebre principio de Arquímedes.

Si dispone de varios tubos de lámparas de petróleo de diferentes formas, pero con los orificios iguales, puede comprobar otro de los principios relativos a los líquidos, que dice: la presión del líquido sobre el fondo de la vasija que lo contiene depende exclusivamente del área de la base y de la altura del nivel del líquido, sin que la forma de la vasija influya en absoluto. La comprobación consistirá en hacer, con los diferentes tubos, el experimento que hemos descrito antes, introduciéndolos sucesivamente en el agua a una misma profundidad (para esto hay que pegar previamente en cada tubo una tirita de papel, de modo que quede a la misma altura). Verá usted que el redondel de cartón se desprenderá cada vez cuando el nivel del líquido dentro de los tubos llegue a la misma altura (fig. 86). Por consiguiente, la presión que ejercen columnas de agua de formas distintas es la misma, siempre que sean iguales sus bases y sus alturas. Preste atención

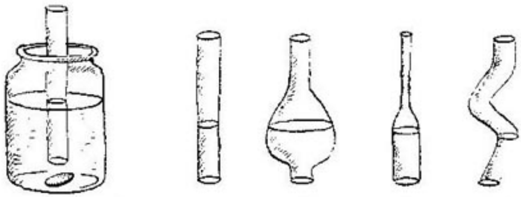


Figura 86

a que, en este caso, lo importante es la *altura* y no la *longitud*, porque la presión que ejerce una columna larga pero *oblicua*, es exactamente igual que la ejercida por una columna vertical corta, que tenga la misma *altura* que aquélla (siempre que sea igual el área de sus bases).

¿Qué pesa más? En uno de los platillos de una balanza hay un cubo lleno de agua hasta los bordes. En el otro, un cubo exactamente igual, también *lleno hasta los bordes*, pero en él flota un trozo de madera (fig. 87). ¿Qué cubo pesa más?

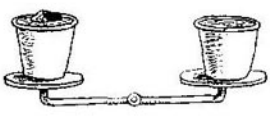


Figura 87

He hecho esta pregunta a diferentes personas y he recibido de ellas respuestas contradictorias. Unas respondían que debe pesar más el cubo en que flota la madera, porque en él, «además del agua, está la medera». Otras, por el contrario, mantenían que pesa más el primer cubo, ya que «el agua es más pesada que la madera».

Pero ni unas ni otras tenían razón: los dos cubos pesan *lo mismo*. Es verdad que en el segundo cubo hay menos agua que en el primero, porque el trozo de madera que flota desaloja cierto volumen de la misma. Pero según el principio de la flotación, cualquier cuerpo *flotante* desaloja, con su parte sumergida, una cantidad de líquido *exactamente igual* (en peso) *a su peso total*. He aquí por qué la balanza deberá mantenerse en equilibrio.

Resuelva usted ahora otro problema. Yo coloco en la balanza un vaso con agua y junto a él pongo una pesa. Después de *nivelar* la balanza, colocando pesas en el otro platillo, cojo la antedicha pesa y la echo en el vaso con agua. ¿Qué ocurrirá con la balanza?

Por el principio de Arquímedes, la pesa dentro del agua pesa menos que fuera de ella. Al parecer, podría esperarse que subiera el platillo de la balanza en que está el vaso. Pero la balanza continúa en equilibrio. ¿Cómo se explica esto?

La pesa, al hundirse en el vaso, desaloja parte del agua, la cual pasa a ocupar un nivel más alto que el que antes tenía. Como resultado de esto, la presión sobre el fondo del vaso aumenta, de manera que dicho fondo experimenta una fuerza adicional, igual al peso que pierde la pesa.

Agua en una criba

Resulta que no sólo en los cuentos es posible llevar agua en una criba. Los conocimientos de física ayudan a realizar esto que clásicamente se considera imposible. Para ello no hay más que coger una criba de alambre, de unos 15 centímetros de diámetro, cuyas mallas no sean demasiado finas (cerca de 1 mm), e introducir la rejilla en un baño de parafina derretida. Cuando se saca la criba del baño, sus alambres están revestidos de una tenue capa de parafina, casi imperceptible a simple vista.

La criba sigue siendo criba y teniendo orificios a través de los cuales puede pasar libremente un alfiler, pero ahora puede usted llevar agua en ella, en el sentido literal de la expresión. En esta criba puede mantenerse una capa de agua bastante alta, sin que se derrame a través de las mallas. No obstante, el agua debe echarse con cuidado y evitar que la criba sufra sacudidas.

Figura 88

¿Por qué no se derrama el agua? Porque como no moja a la parafina, forma en las mallas de la criba unas películas delgadas, cuya convexidad mira hacia abajo, que sostienen el agua (fig. 88).

Esta criba parafinada puede ponerse sobre el agua y flotará en ella. Es decir, que la criba puede servir no sólo para llevar agua, sino también para navegar en ella.

Este paradójico experimento explica una serie de fenómenos ordinarios a los cuales estamos tan acostumbrados, que no nos paramos a pensar en sus causas. El objetivo que se persigue al embrear los toneles y las barcas, al engrasar los tapones y los casquillos, al pintar con pinturas al aceite y, en general, al recubrir con substancias oleaginosas todos los objetos que deseamos hacer impermeables al agua, así como al cauchotar los tejidos, no es otro que el convertirlos en una especie de criba como la que acabamos de describir. La esencia de estos fenómenos en uno y otro caso es la misma, aunque en el de la criba ofrece un aspecto al cual no estamos acostumbrados.

Pompas de jabón

¿Sabe usted hacer pompas de jabón? Esto no es tan fácil como parece. A mí también me pareció que para esto no hacía falta ningún entrenamiento, hasta que me convencí en la práctica de que saber hacer pompas de jabón grandes y bonitas es, en cierto modo, un arte que requiere habilidad.

Pero, ¿vale la pena dedicarse a algo tan inútil como hacer pompas de jabón?

En la vida ordinaria estas pompas no gozan de buena fama; por lo menos, en la conversación las recordamos para hacer comparaciones poco halagüeñas. Pero los físicos las miran con mejores ojos. «Haced una pompa de jabón —escribía el gran físico inglés Kelvin— y miradla: aunque dediquéis toda vuestra vida a su estudio, no dejaréis de sacar de ella nuevas enseñanzas de física».

Efectivamente, los mágicos reflejos policromos de la superficie de las tenues películas de jabón dan a los físicos la posibilidad de medir la longitud de las ondas luminosas, y el estudio de la tensión de estas delicadas películas ayuda a conocer las leyes que rigen la acción de las fuerzas que actúan entre las partículas, es decir, de la cohesión, sin la cual en el mundo no existiría nada más que polvo finísimo.

Los pocos experimentos que se describen a continuación no persiguen objetivos tan serios. Son simplemente pasatiempos interesantes que sólo sirven para aprender el arte de hacer pompas de jabón. El físico inglés Ch. Boyce, en su libro «Pompas de Jabón», describe detalladamente una larga serie de experiencias que pueden hacerse con ellas. Recomendamos este magnífico libro a todos los que se interesen por esta materia, ya que aquí nos limitamos a describir los experimentos más simples.

Estas experiencias pueden hacerse con una solución de jabón de lavar ordinario[1]), para los que lo deseen, aconsejamos el llamado jabón de Marsella, el

[1]) Los jabones de tocador no sirven para este fin.

de aceite puro de oliva o el de almendra, que son los más a propósito para obtener pompas grandes y bonitas. Un trozo de este jabón se deslíe cuidadosamente en agua fría pura, hasta que se obtiene una solución bastante espesa. Lo mejor es utilizar agua limpia de lluvia o de nieve o, en su defecto, agua hervida fría. Para que las pompas duren mucho, Plateau aconseja añadir a la solución jabonosa 1/3 (en volumen) de glicerina. La espuma y las burbujas que se forman se quitan con una cucharilla y después se introduce en la solución un tubito de arcilla delgado, cuyo extremo se unta previamente de jabón por dentro y por fuera. También se consiguen buenos resultados con pajas de unos diez centímetros de longitud, con su extremo inferior abierto en forma de cruz.

Las pompas se hacen del modo siguiente: después de mojar el tubo en la solución jabonosa, y manteniéndolo verticalmente para que en su extremo se forme la película de líquido, se sopla en él con cuidado. Como al hacer esto la pompa se llena con el aire caliente que sale de nuestros pulmones, que es más ligero que el que lo rodea en la habitación, la pompa inflada se eleva inmediatamente.

Si se consigue que la primera pompa que se hace tenga 10 cm de diámetro, la solución jabonosa es buena; en el caso contrario hay que añadirle jabón al líquido, hasta que se puedan hacer pompas del diámetro indicado. Pero esta prueba no es suficiente. Después de hacer la pompa, se moja un dedo en la solución jabonosa y se intenta introducirlo en aquélla; si la pompa no revienta, pueden comenzarse los experimentos, y si no resiste, hay que agregarle a la solución un poco más de jabón.

Los experimentos deben hacerse despacio, con cuidado y tranquilamente. La iluminación debe ser lo más clara posible: de lo contrario las pompas no mostrarán sus policromos reflejos.

He aquí experimentos recreativos con pompas.

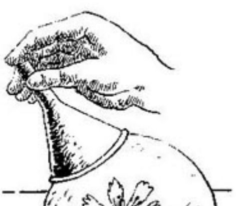


Figura 89

Una flor dentro de una pompa de jabón. En un plato o en una fuente se echa agua jabonosa hasta que su fondo se cubra de una capa de 2 ó 3 mm de altura. En medio del plato se pone una flor o un florerito y se cubre con un embudo de vidrio. Después se va levantando despacito el embudo, al mismo tiempo que se sopla por su parte estrecha. Se forma una pompa de jabón. Cuando esta pompa es suficientemente grande, se inclina el embudo, como muestra la fig. 89, y se libera la pompa de debajo de él. La flor queda cubierta por un fanal hemisférico transparente, formado por la película jabonosa, que reflejará todos los colores del iris.

En lugar de la flor puede colocarse una estatuilla, coronando su cabeza con otra pompa de jabón. Para esto hay que echar previamente una gota de solución jabonosa en la cabeza de la estatuilla y, después, cuando ya esté hecha la pompa grande, traspasarla con un tubito y soplar dentro de ella la pompa pequeña.

Varias pompas, unas dentro de otras. Con el embudo que se utilizó para la experiencia anterior, se hace una pompa grande. Luego se toma una pajita, se introduce totalmente en la solución jabonosa, de modo que sólo quede seco el extremo que se ha de coger con los labios, y con ella se atraviesa cuidadosamente la pared de la primera pompa, hasta llegar al centro. Tirando despacio de la pajita hacia atrás y teniendo cuidado de no sacar el extremo, se infla la segunda pompa dentro de la primera. Repitiendo la operación se hace la tercera, dentro de la segunda, después, la cuarta, y así sucesivamente.

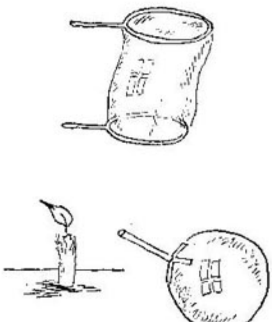


Figura 90

Un cilindro de película jabonosa (fig. 90) puede obtenerse entre dos anillos de alambre. Para esto, sobre el anillo inferior se deja caer una pompa esférica ordinaria, después, por la parte superior, se aplica a esta pompa un segundo anillo mojado y tirando de él hacia arriba, se va estirando la pompa hasta que se hace cilíndrica. Es interesante que si se sube el anillo superior a una altura mayor que la longitud de su circunferencia, una mitad del cilindro se estrecha y la otra se ensancha, y luego se divide en dos pompas.

La película de la pompa de jabón está siempre tensa y presiona sobre el aire contenido en ella. Dirigiendo el embudo a la llama de una vela, podrá usted convencerse de que la fuerza de estas delgadísimas películas no es tan insignificante como pudiera parecer; la llama se desvía sensiblemente hacia un lado (fig. 90).

También es interesante observar una pompa cuando pasa de un local templado a otro frío: se ve cómo su volumen disminuye; en cambio, cuando pasa de una habitación fría a otra caliente, se hincha. La causa de que esto ocurra es, claro está, la compresión y dilatación del aire que hay dentro de la pompa. Si, por ejemplo, una pompa a $-15°C$ tiene 1000 centímetros cúbicos de volumen y se traslada a un local en que la temperatura es de $+15°$ C, su volumen deberá aumentar aproximadamente en 1000 × 30 × 1/273, es decir, en cerca de 110 centímentros cúbicos.

Conviene señalar también que la idea ordinaria de que las pompas de jabón son poco duraderas, no es cierta: teniendo cuidado con ellas se consigue conservarlas décadas enteras. El físico inglés Dewar (célebre por sus trabajos de licuación del aire) guardaba las pompas de jabón en unas botellas especiales, que las protegían contra el polvo y las sacudidas del aire e impedían que se secasen; en estas condiciones logró conservar algunas pompas más de un mes. Lawrence, en Norteamérica, consiguió conservar pompas de jabón, debajo de un fanal, durante años.

Un embudo perfeccionado

Todo el que haya tenido que echar líquido en una botella sirviéndose de un embudo, sabe que de tiempo en tiempo hay que levantar el embudo, porque de lo contrario el líquido no pasa. El aire que hay en la botella, al no encontrar salida, mantiene con su presión el líquido que se halla en el embudo. Es verdad que una pequeña cantidad de líquido escurre hacia abajo, de manera que el aire que hay en la botella es comprimido por la presión del agua. Pero el aire oprimido en el volumen reducido tendrá una elasticidad mayor, suficiente para equilibrar con su presión el peso del líquido que hay en el embudo. Está claro que, levantando un poco el embudo, dejamos salir al exterior el aire comprimido y, entonces, el líquido empieza otra vez a entrar en la botella.

Por esto, resultará muy práctico hacer los embudos de tal modo, que su parte estrecha tenga unos salientes longitudinales, en la superficie exterior, que impidan que el embudo entre ajustado en el gollete.

¿Cuánto pesa el agua que hay en un vaso boca abajo?

—No pesará nada —dirá usted—, porque el agua se derramará.

— ¿Y si no se derrama? En efecto, el agua se puede retener en el vaso invertido, de modo que no se derrame (fig. 91).Como puede verse, una copa de vidrio invertida, sujeta por el pie al brazo de una balanza, está llena de agua, la cual no se derrama porque los bordes de la copa están sumergidos en el agua que hay en otra vasija. Al otro brazo de la balanza está sujeta una copa vacía, exactamente igual que la primera.

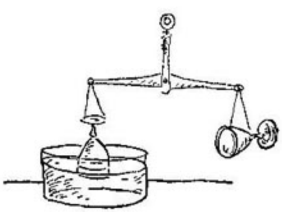


Figura 91

¿Hacia qué lado se inclinará la balanza?

Hacia el lado en que está sujeta la copa invertida llena de agua. Esta copa está sometida por arriba a la presión atmosférica total, mientras que por abajo, la presión atmosférica está debilitada por el peso del agua contenida en la copa. Para restablecer el equilibrio sería necesario llenar de agua la copa atada al otro brazo. Por lo tanto, en las condiciones indicadas, el agua contenida en un vaso boca abajo pesa lo mismo que la contenida en dicho vaso en posición normal.

¿Cuánto pesa el aire que hay en una habitación?

¿Puede usted decir, aunque sea aproximadamente, qué carga representa el aire que llena una habitación pequeña? ¿Varios gramos o varios kilogramos? ¿Podría usted levantar esta carga con un dedo, o la soportaría con dificultad en el hombro?

Ya no es fácil encontrar personas que crean que el aire no pesa nada, como pensaban en la antigüedad. Pero aún hay muchos que no pueden decir cuánto pesa.

Acuérdese de que un litro de aire estival templado, junto a la Tierra (pero no en las montañas), pesa $1\,^1/_5$ g. Un metro cúbico tiene 1000 litros; por lo tanto, un metro cúbico de aire pesará 1000 veces más que $1\,^1/_5$ g, es decir, $1\,^1/_5$ kg.

Ahora no le será difícil calcular cuánto pesa el aire que hay en una habitación cualquiera. Para esto no hay más que saber cuántos metros cúbicos tiene la habitación. Si el área de su suelo es de 15 m^2 y su altura de 3 m, habrá en ella $15 \times 3 = 45$ m^3. Este aire pesa 45 kg y $^1/_5$ de 45, es decir, 9 kg más, o sea, 54 kg en total. Esta carga no se levanta con un dedo, y tampoco es fácil de llevar en el hombro.

Un tapón rebelde

Este experimento le demostrará que el aire comprimido tiene fuerza y que ésta es considerable.

Para hacerlo no necesita más que una botella ordinaria y un tapón que sea algo más pequeño que el orificio de la botella.

Ponga la botella horizontal, colóquele el tapón en el gollete y propóngale a alguien que meta el tapón en la botella soplándole.

Al parecer no hay nada más fácil. Pero pruebe, sóplele al tapón con fuerza, y quedará usted sorprendido del resultado. El tapón no sólo no entrará en la botella, sino que... saldrá despedido hacia su cara.

Cuanto más fuerte sople usted, tanto más rápidamente saldrá despedido el tapón en sentido contrario.

Para lograr que el tapón penetre en la botella hay que hacer lo contrario, es decir, no soplarle al tapón, sino aspirar el aire a través del intersticio que hay sobre él.

Estos extraños fenómenos se explican así. Cuando se le sopla al gollete de la botella, se insufla aire en ella a través del intersticio que hay entre el tapón y la pared del gollete. Con esto aumenta la presión del aire dentro de la botella y aquél lanza con fuerza el tapón hacia fuera. En cambio, cuando usted aspira el aire, éste se enrarece dentro de la botella y el tapón es empujado hacia dentro por la presión del aire exterior. La experiencia sólo sale bien cuando el gollete de la botella está completamente seco, porque si el tapón se humedece, roza con la pared y se atasca.

La suerte del globo de goma

Los globos de goma que se sueltan salen volando. ¿Adónde van a parar? ¿Hasta qué altura pueden llegar?

Cuando un globo de goma se escapa de las manos no va a parar a los límites superiores de la atmósfera, sino nada más que hasta su «techo», es decir, hasta la altura en que, debido al gran enrarecimiento del aire, el peso del globo es igual al del aire que desaloja. Pero no siempre llega al «techo». Como el globo se va hinchando a medida que se eleva (a causa de la disminución de la presión exterior), antes de llegar al «techo», revienta.

¿Cómo hay que soplar para apagar una vela?

Parece que no hay cosa más sencilla que apagar una vela soplándole, pero no siempre se consigue esto. Intente usted apagar una vela no directamente, sino soplándole a través de un embudo, comprobará que esto requiere cierto entretenimiento. Coloque el embudo delante de la vela y sople por él teniendo en los labios su parte estrecha. La llama ni se moverá, a pesar de que el chorro de aire que sale del embudo parece que debe dirigirse directamente a la vela.

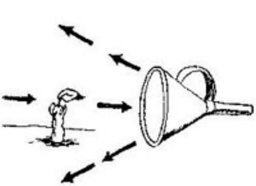


Figura 92

Si cree que el embudo está demasiado lejos de la llama, aproxímelo y vuelva a soplar. El resultado que obtiene es inesperado: la llama se inclina no alejándose, sino acercándose a usted, es decir, al encuentro del chorro de aire que sale del embudo.

¿Qué debe hacer usted, si quiere apagar la vela? Debe poner el embudo de tal forma, que la llama se encuentre no en la línea de su eje, sino en la prolongación de su pabellón. Si sopla por el embudo en estas condiciones, apagará la vela sin dificultad.

Esto se explica porque el chorro de aire, al salir de la parte estrecha del embudo, no sigue su eje, sino que se extiende a lo largo de las paredes del pabellón formando aquí una especie de torbellino de aire. En cambio, a lo largo del eje del embudo, el aire se enrarece, por lo que cerca del punto medio se origina una corriente de aire inversa. Ahora está claro por qué la llama situada frente a la mitad del embudo se inclina a su encuentro, mientras que cuando se halla frente a su borde, se inclina hacia adelante y se apaga.

La rueda del automóvil

La rueda de un automóvil da vueltas hacia la derecha, es decir, su llanta gira en el sentido de las agujas del reloj. Se plantea la siguiente pregunta: ¿en qué dirección se desplaza el aire que hay dentro del neumático, al encuentro del movimiento de la rueda o en su misma dirección? El aire que hay dentro del neumático se mueve, desde el punto en que se comprime éste, en ambos sentidos, hacia delante y hacia atrás.

¿Para qué se dejan huecos entre los raíles?

Entre las juntas a tope de los raíles se dejan siempre intervalos u holguras. Esto se hace adrede. Si no se dejan estas holguras y los raíles se colocan en contacto directo unos con otros, el ferrocarril se averiará pronto. Es el caso, que todos los objetos se dilatan en todos los sentidos cuando se calientan. También se dilata (alarga) el raíl de acero en verano, cuando lo calienta el sol. Si no se deja espacio para que los raíles puedan alargarse, éstos, apoyando sus extremos unos en otros con gran fuerza, se torcerán hacia un lado, arrancarán las escarpias que los sujetan y estropearán toda la vía.

Las holguras se dejan teniendo en cuenta el invierno. Cuando hace frío se contraen los raíles y se hacen más cortos, por lo que las holguras pueden aumentar todavía más. Por esto se calculan adaptándose al clima del lugar por donde pasa la vía férrea.

De ejemplo de cómo se aprovecha la propiedad de los cuerpos de contraerse al enfriarse puede servir el procedimiento que se emplea generalmente para montar las bandas de hierro en las ruedas de los carros. La banda se calienta previamente, se monta, y cuando se enfría, se contrae y abraza fuertemente la llanta de la rueda.

Los vasos para té y para refrescos

Usted habrá notado probablemente que los vasos que se utilizan para las bebidas frías suelen tener grueso el fondo. El porqué de esto está claro: estos vasos son muy estables y no es fácil volcarlos. ¿Por qué no se usan estos mismos vasos para el té? En este caso tampoco estaría mal que no se volcasen los vasos.

Los vasos de fondo grueso no se utilizan para las bebidas calientes porque sus paredes se calientan y dilatan más con el calor del líquido que el fondo grueso. Estos recipientes no son prácticos para el té: saltan. Cuanto más fino es el recipiente y menor la diferencia de espesor entre las paredes y el fondo, tanto más uniforme es su calentamiento y tanto menor es su propensión a resquebrajarse.

El agujerito de la tapa de la tetera

La tapadera de las teteras metálicas tienen un agujerito. ¿Para qué sirve? Para que pueda salir el vapor, sino éste despedirá la tapa de la tetera. Pero, al calentarse, el material de la tapa se dilata en todos los sentidos. ¿Qué ocurre en este caso con el agujerito, aumenta o disminuye? Cuando se calienta la tapadera de la tetera, el agujerito aumenta de tamaño. En general, los orificios y las cavidades aumentan de volumen al calentarse, exactamente lo mismo que un trozo igual del material que lo rodea. Por esta razón la capacidad de las vasijas aumenta al calentarse éstas, y no disminuye, como piensan algunos.

El humo

¿Por qué, cuando no hace viento, sube el humo de las chimeneas?

El humo sube porque lo saca el aire caliente, dilatado y, por lo tanto, más ligero que el que rodea a la chimenea. Cuando el aire que mantiene a las partículas de humo se enfría, el humo baja y se esparce por la tierra.

Un papel que no se quema

Puede hacerse un experimento en el cual una tira de papel no se quema en la llama de una vela.

Para esto hay que arrollar fuertemente, como si fuera una venda, una tira estrecha de papel a una barra de hierro. Si esta barra, con su tira de papel, se somete a la llama de una vela, el papel no arde. El fuego lamerá el papel y lo tiznará, pero no lo quemará mientras la barra no se caldee.

¿Por qué no se quema el papel? Porque el hierro, como todo metal, conduce bien el calor y retira rápidamente del papel el calor que éste recibe de la llama. Si la barra metálica se sustituye por una de madera, el papel se quemará, porque la madera es mal conductor del calor. El experimento sale mejor aún si la barra es de cobre.

Arrollando fuertemente un hilo a una llave, puede usted hacer el experimento del hilo incombustible.

¿Cómo se enmasillan las ventanas para el invierno?

Una ventana bien enmasillada ahorra calor. Pero para enmasillar bien una ventana hay que comprender claramente por qué «calientan» la habitación las contraventanas.

Hay muchos que creen que las contraventanas se ponen en invierno porque dos ventanas valen más que una. Pero esto no es así. La cuestión no está en la contraventana, sino en el aire que queda encerrado entre la ventana y la contraventana.

El aire conduce muy mal el calor. Por esto, el aire bien cerrado, para que no pueda escapar y llevarse calor, protege a la habitación no dejando que se enfríe.

Para esto el aire tiene que estar perfectamente cerrado. Algunos piensan que cuando se enmasilla una ventana hay que dejar una rendija en la parte superior de su hoja exterior. Esto es un gran error. Si se hace esto, el aire que hay entre la ventana y la contraventana será obligado a salir por el aire frío exterior, con lo cual se enfriará la habitación. Hay que hacer lo contrario, enmasillar tanto la ventana como la contraventana lo mejor que se pueda, sin dejar ni la menor rendija.

Si no se dispone de masilla, en vez de enmasillar se pueden pegar tiras de papel fuerte. Sólo las ventanas bien enmasilladas o con las rendijas bien tapadas con papel pegado ahorran calefacción.

¿Por qué sopla el viento cuando la ventana está cerrada?

Solemos extrañarnos de que, cuando hace frío, sopla con frecuencia el viento de una ventana que está bien cerrada, cuidadosamente enmasillada y que no tiene ni la más pequeña rendija. Sin embargo, esto no tiene nada de extraño.

El aire de una habitación casi nunca está en reposo: en ella existen corrientes invisibles que se originan por el calentamiento y enfriamiento del aire. Al calentarse, el aire se enrarece y, por consiguiente, se hace más liviano; al enfriarse, por el contrario, el aire se densifica y se hace más pesado. El aire ligero, calentado por una lámpara o por una estufa, es desplazado hacia arriba, hacia el techo, por el aire frío, porque el aire más pesado, enfriado junto a las ventanas o paredes frías, baja hacia el suelo.

Estas corrientes del aire de la habitación se pueden descubrir fácilmente valiéndose de un globo de goma lleno de gas, si se le ata un pequeño contrapeso para que no se pegue al techo, sino que pueda volar libremente en el aire. Este globo, si lo soltamos junto a la estufa, irá de una parte a otra de la habitación arrastrado por las corrientes de aire invisibles: desde la estufa subirá hasta el techo e irá hacia la ventana, allí descenderá hasta el suelo y regresará a la estufa, para comenzar de nuevo su recorrido por la habitación. Esta es la causa de que en invierno sintamos cómo el aire sopla de la ventana, sobre todo por abajo, aunque esté tan bien cerrada que el aire exterior no pueda penetrar por las rendijas.

¿Cómo hay que enfriar con hielo?

Cuando quiere usted enfriar una bebida, ¿dónde pone la jarra, sobre el hielo o debajo de él?

Muchos no lo piensan y ponen la jarra sobre el hielo, lo mismo que se pone un puchero sobre el fuego. Pero así no se debe enfriar. Cuando hay que calentar, debe hacerse efectivamente, por abajo, pero si se quiere enfriar, hay que hacerlo por arriba.

Procure comprender por qué es más conveniente enfriar por arriba que por abajo. Usted sabe que una substancia fría es más densa que cuando está caliente; una bebida fría es más densa que antes de enfriarla. Cuando coloca el hielo encima de la jarra con la bebida, las capas superiores de ésta (que están junto al hielo) se enfrían, se hacen más densas y descienden; su puesto es ocupado por otras porciones de líquido más templadas, las cuales son enfriadas por el hielo y descienden a su vez. Al cabo de un corto espacio de tiempo toda la bebida que hay en la jarra habrá pasado junto al hielo y se habrá enfriado. Por el contrario, si pone usted la jarra sobre el hielo, la primera que se enfría es la más inferior de las capas de la bebida; esta capa se hace más densa, permanece en el fondo y no cede su puesto a las demás capas, que siguen estando templadas. En este caso no se produce ninguna remoción del líquido, por lo que éste se enfría muy lentamente.

Conviene enfriar por arriba no sólo las bebidas, sino también la carne, las verduras y el pescado, porque estos alimentos se enfrían no tanto por el propio hielo como por el aire enfriado por él, que se mueve hacia abajo, y no hacia arriba. Y si alguna vez tiene usted que refrigerar la habitación de un enfermo, por ejemplo, no ponga el hielo debajo de la cama, sino en cualquier lugar alto, en un anaquél o colgado del techo.

El color del vapor de agua

¿Ha visto usted alguna vez vapor de agua? ¿Puede decir qué color tiene?

En el sentido estricto de la palabra, el vapor de agua es completamente transparente e incoloro. No se puede ver, como no puede verse el aire. Esa niebla blanca que llamamos de ordinario «vapor», es una concentración de gotitas de agua pequeñísimas; es agua pulverizada y no vapor.

¿Por qué «canta» el samovar?

¿A qué se debe ese sonido armonioso que emite el samovar poco antes de que el agua empiece a hervir? El agua que se encuentra en contacto directo con el tubo del samovar, se transforma en vapor, el cual forma en el agua pequeñas burbujas. Como son más ligeras, estas burbujas son desplazadas hacia arriba por el agua que las rodea. Aquí se encuentran con agua cuya temperatura es menor de 100° C. El vapor se enfría, se contrae y las paredes de las burbujas, presionadas por el agua, se juntan. Cuando poco antes de comenzar la ebullición, las burbujas, cada vez más numerosas, ascienden, no llegan hasta el nivel del agua, sino que, con un tenue chasquido, revientan por el camino. De estos innumerables chasquidos procede el ruido que escuchamos antes de la ebullición.

Cuando toda el agua que hay en el samovar o en la cafetera se calienta hasta la temperatura de ebullición, las burbujas dejan de reventar al pasar a través del espesor de agua y el «canto» cesa. Pero en cuanto el samovar empieza a enfriarse, vuelven a crearse las condiciones para que suene, y el «canto» se reanude.

Esta es la razón por la cual los samovares y las cafeteras sólo «cantan» antes de empezar a hervir el agua y cuando empieza a enfriarse, pero cuando el agua está hirviendo, el samovar no emite nunca este sonido armonioso.

Un molinete misterioso

Coja un papel de fumar, dóblelo por sus líneas medias y ábralo: así sabrá donde está su centro de gravedad. Deposite ahora este papel sobre la punta de una aguja clavada verticalmente, de forma que su centro de gravedad se apoye en dicha punta.

Figura 93

El papel quedará en equilibrio, puesto que descansa sobre su centro de gravedad. Pero bastará el menor soplo para que comience a girar.

Hasta ahora este artificio no tiene nada de misterioso. Pero acérquele una mano, como indica la fig. 93; acérquela con cuidado, para que el papel no sea barrido por la corriente de aire. Verá usted una cosa rara: el papel empezará a dar vueltas, primero despacio y luego cada vez más de prisa. Separe la mano, y el papel dejará de girar. Acérquela otra vez, y volverá a girar.

Esta rotación misteriosa hizo pensar a muchos, allá por los años 70 del siglo pasado, que nuestro cuerpo posee ciertas propiedades sobrenaturales. Los aficionados a la mística hallaban en este experimento la confirmación de sus confusas doctrinas acerca de una fuerza misteriosa que emana del cuerpo humano. Sin embargo, la causa de este fenómeno es completamente natural y muy sencilla: el aire que nuestra mano calienta abajo, al elevarse, presiona sobre el papel y le hace girar, de un modo semejante a como lo hace la conocida «serpiente» de papel sobre la lámpara, porque al doblar el papel le dio usted una pequeña inclinación a sus diversas partes.

Un observador atento puede darse cuenta de que el molinete descrito gira en una dirección determinada, es decir, desde la muñeca, siguiendo la palma de la mano, hacia los dedos. Esto puede explicarse por la diferencia de temperatura que tienen las mencionadas partes de la mano: los extremos de los dedos están siempre más fríos que la palma de la mano; por este motivo, cerca de la palma se origina una corriente de aire ascendente más intensa, que empuja el papel con más fuerza que la corriente debida al calor de los dedos.

¿Calienta el abrigo?

¿Qué diría usted si le asegurasen que su abrigo *no calienta* nada? Pensaría, como es natural, que querían gastarle una broma. Pero, ¿y si empezaran a demostrarle esta afirmación con una serie de experimentos? Haga por ejemplo el siguiente.

Mire cuantos grados marca un termómetro y envuélvalo en su abrigo. Al cabo de varias horas, sáquelo. Se convencerá de que no se ha calentado ni en cuarto de grado: lo que antes marcaba, marca ahora. Ahí tiene una prueba de que el abrigo no calienta. Usted incluso podría sospechar que el abrigo *enfría*. Coja si no dos frasquitos con hielo; envuelva uno de ellos en el abrigo y deje el otro sin tapar en la habitación. Cuando se haya derretido el hielo en este último, abra el abrigo: verá que el hielo que había en él apenas si ha comenzado a fundirse. Por lo tanto, el abrigo no sólo no ha calentado el hielo, sino que al parecer incluso lo ha enfriado, retardando su licuación.

¿Qué puede objetarse a esto? ¿Cómo desmentir estas conclusiones?

De ningún modo. El abrigo realmente no calienta, si se entiende por «calentar» *dar calor*. La lámpara calienta, la estufa calienta, el cuerpo humano calienta, porque todos estos cuerpos son fuentes de calor. Pero el abrigo, en este sentido de la palabra, no calienta nada. *El abrigo no da calor, sino que se limita a impedir que el calor de nuestro cuerpo salga de él*. He aquí por qué los animales de sangre caliente (homotermos), cuyo cuerpo es fuente de calor, se sentirán más calientes con el abrigo que sin él. Pero el termómetro no genera calor propio y, por eso, su temperatura no varía aunque lo envolvamos en el abrigo. El hielo envuelto en el abrigo conserva más tiempo su baja temperatura, porque éste es muy mal conductor del calor e impide que llegue hasta el hielo el calor exterior, es decir, el calor del aire que hay en la habitación.

En el mismo sentido que el abrigo, la nieve calienta la tierra, porque siendo, como todos los cuerpos pulverizados, mala conductora del calor, impide la salida del que tiene la tierra que ella cubre. En las tierras protegidas por una capa de nieve, el termómetro marca frecuentemente diez grados más que en las tierras desnudas de nieve. Esta acción calefactora de la capa de nieve es bien conocida por los campesinos.

Así, pues, a la pregunta de que si calienta un abrigo, debe responder que el abrigo sólo sirve para que nos calentemos nosotros mismos. Lo más exacto sería decir, que nosotros calentamos el abrigo, y no él a nosotros.

¿Cómo hay que ventilar la habitación en invierno?

El mejor procedimiento de ventilar una habitación en invierno consiste en abrir el ventanillo de la ventana mientras se calienta la estufa. El aire exterior, fresco y puro, le empujará al más templado y ligero, que hay en la habitación, hacia la estufa, de donde, a través de la chimenea, comenzará a salir al exterior.

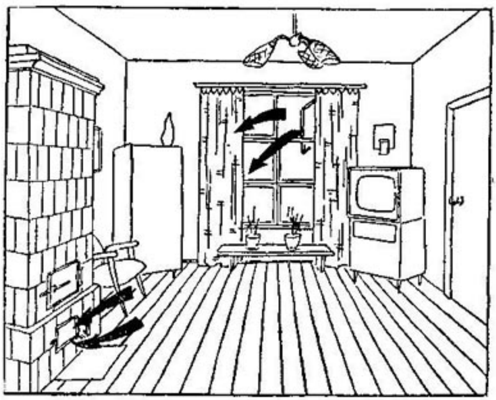


Figura 94

No debe pensarse que lo mismo ocurriría si el ventanillo estuviera cerrado, ya que, en este caso, el aire exterior penetraría en la habitación a través de las rendijas en las paredes. En efecto, el aire se infiltra en la habitación, pero en cantidad insuficiente para mantener la combustión en la estufa. Por esto, además del aire de la calle, en la habitación penetra también, a través de las rendijas que hay en el suelo y en los tabiques, aire procedente de los locales donde éste no puede ser ni puro ni fresco.

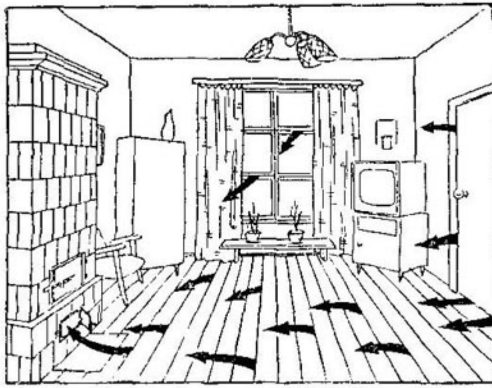


Figura 95

La diferencia entre las corrientes de aire en uno y otro caso se ve claramente en nuestras figuras; las corrientes de aire se representan en ellas por medio de flechas.

¿Dónde se debe hacer el ventanillo?

¿Dónde debe hacerse el ventanillo, arriba o abajo? Hay apartamentos en los cuales el ventanillo está en la parte baja de la ventana. Esto es cómodo: para abrirlo y cerrarlo no hay que subirse a una silla. Pero los ventanillos bajos cumplen mal su función de ventilar la habitación. En efecto, ¿por qué se produce el intercambio de aire exterior e interior de la habitación a través del ventanillo? Porque el aire exterior está más frío que el de dentro de la habitación, y, como es más denso, lo desaloja. Pero el aire frío ocupa solamente la parte del local que está por debajo del ventanillo. Todo el aire que hay en la habitación por encima del ventanillo no participa en el intercambio, es decir, no se ventila.

Una cacerola de papel

Fíjese en la fig. 96: ¡un huevo se cuece en el agua que hay en un cucurucho de papel!

—Pero el papel se quemará inmediatamente y el agua apagará la llama —dirá usted.

Haga usted el experimento con papel apergaminado fuerte, bien sujeto a un mango de alambre. Se convencerá de que el papel no se deteriora nada con el fuego. La causa de que esto ocurra es que, en un recipiente abierto, el agua sólo puede calentarse hasta la temperatura de ebullición, o sea, hasta 100° C. Por esto, el agua que se calienta, que posee además una gran capacidad calorífica, absorbe el exceso de calor del papel y no deja que se caliente sensiblemente a más de 100° C, es decir, hasta una temperatura a que pueda inflamarse. (Resultará más práctico utilizar una pequeña cajita de papel, como la que representa la fig. 99, a la derecha). El papel no se quema aunque lo rocen las llamas.

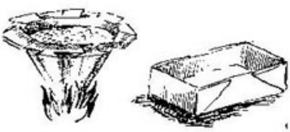


Figura 96

A este mismo tipo de fenómenos pertenece tamdién el triste experimento que, inconcientemente, hacen las personas distraídas que ponen a calentar el samovar sin echarle agua. El samovar se desuelda. La causa es comprensible: el metal de la soldadura se funde con relativa facilidad, y solamente su estrecho contacto con el agua lo protege de las peligrosas elevaciones de temperatura. Tampoco se pueden poner a calentar sin agua las cacerolas soldadas.

Usted puede también fundir un precinto de plomo, por ejemplo, en una cajita hecha con un naipe. Lo único que hace falta es tener la precaución de que la llama caliente precisamente el sitio del naipe que se encuentra en contacto directo con el plomo. Este metal, como es relativamente buen conductor del calor, absorbe rápidamente el calor de la cartulina y no deja que se caliente a una temperatura sensiblemente mayor que la de su fusión, es decir, de 335° C (para el plomo), que es insuficiente para que se inflame el papel.

¿Para qué sirve el tubo de la lámpara?

Pocos son los que conocen el largo camino recorrido por el tubo de vidrio de las lámparas de petróleo hasta adquirir la forma que ahora tiene. Una larga serie de milenios el hombre se alumbró con la llama, sin recurrir al vidrio. Fue necesario el genio de Leonardo de Vinci (1452—1519) para realizar este importante perfeccionamiento de las lámparas. Pero el tubo con que Leonardo rodeó la llama no era de vidrio, sino de metal. Pasaron tres siglos más, hasta que fue concebida la idea de sustituir el tubo metálico por un cilindro transparente de vidrio. Como ve, el tubo de vidrio de las lámparas es un invento en el que participaron decenas de generaciones.

¿Para qué sirve este tubo?

Lo mas probable es que no todo el mundo pueda dar una respuesta acertada a esta pregunta tan natural.

La protección de la llama contra el viento no es más que una función secundaria del tubo.

Su objetivo fundamental es aumentar el *brillo* de la llama acelerando la combustión. El papel del tubo de la lámpara es el mismo que desempeñan las chimeneas de la estufa o de una fábrica: intensificar el flujo de aire que llega a la llama, es decir, el «tiro».

Analicemos esto. La llama calienta la columna de aire que hay dentro del tubo mucho más de prisa que al aire que rodea la lámpara. El aire del tubo, una vez calentado, con lo que se hace más ligero, es desplazado hacia arriba por el aire frío, más pesado, que entra por abajo a través de los orificios del mechero. De este modo se establece una corriente continua de aire, de abajo a arriba, que se lleva los residuos de la combustión y trae aire fresco. Cuanto más alto sea el tubo, mayor será la diferencia de peso entre las columnas de aire caliente y fría y más intensa será la corriente de aire fresco y, por consiguiente, se acelerará la combustión. Aquí pasa lo mismo que en las altas chimeneas de las fábricas. Por esto dichas chimeneas se hacen tan altas.

Leonardo de Vinci comprendió ya claramente este fenómeno. En sus manuscritos hay una nota que dice: «Donde se produce fuego se forma a su alrededor una corriente de aire que lo mantiene e intensifica».

¿Por qué la llama no se apaga a sí misma?

Si se recapacita acerca del proceso de la combustión se plantea forzosamente la pregunta: ¿por qué la llama no se apaga a sí misma? Los productos de la combustión son el anhídrido carbónico y el vapor de agua, ambos *incombustibles* e incapaces de mantener la combustión. Por consiguiente, desde el primer instante de la combustión, la llama debe estar rodeada de substancias incombustibles que impiden la llegada de aire, y como sin aire no puede continuar la combustión, la llama debería apagarse.

¿Por qué no ocurre esto? ¿Por qué la combustión continúa mientras queda materia combustible? Unicamente porque los gases se dilatan al calentarse y, por lo tanto, *se hacen más ligeros*. Sólo a esto se debe el que los productos calientes de la combustión no se queden en el lugar en que se originan, en contacto directo con la llama, sino que sean desplazados inmediatamente hacia arriba por el aire fresco. Si el principio de Arquímedes no se extendiera a los gases (o si no existiera la gravedad), toda llama, después de arder un poco, se apagarían de por sí.

Del efecto tan funesto que producen en la llama los productos de su combustión, es bastante fác l convencerse. Usted mismo se sirve de este efecto, sin sospecharlo, cuando apaga la lámpara. ¿Qué hace para esto? Le sopla por arriba, es decir, lanza hacia abajo, hacia la llama, los productos incombustibles que ella produce al arder, con lo cual queda privada de la entrada libre de aire y se apaga.

¿Por qué el agua apaga el fuego? A esta pregunta tan fácil no todos saben responder bien. Esperamos que el lector no se quejará si explicamos escuetamente en qué consiste en esencia la acción del agua sobre el fuego.

En primer lugar, al ponerse en contacto con el objeto que arde, el agua se convierte en vapor, con lo que le quita mucho calor a dicho objeto; para que el agua hirviendo se transforme en vapor hace falta una cantidad de calor cinco veces y pico mayor que la que se necesita para calentar hasta 100° C una cantidad igual de agua fría.

En segundo lugar, el vapor que se forma ocupa un volumen centenares de veces mayor que el que tenía el agua que lo engendró; este vapor rodea al cuerpo que arde y desplaza el aire, y sin aire es imposible la combustión.

A veces, para aumentar el poder extintor del agua, se mezcla con... ¡pólvora! Esto puede parecer raro, pero es completamente lógico: la pólvora arde muy de prisa y produce una gran cantidad de gases incombustibles, los cuales rodean al objeto que se quema y dificultan su combustión.

El calentamiento con hielo y con agua hirviendo

¿Se puede calentar con un trozo de hielo otro trozo de hielo?

¿Se puede enfriar con un trozo de hielo otro trozo de hielo?

¿Se puede calentar con una porción de agua hirviendo otra porción de agua hirviendo?

Si un trozo de hielo a baja temperatura, por ejemplo, a —20° C, se pone en contacto con otro trozo cuya temperatura sea mayor, por ejemplo, —5° C, el primer trozo de hielo se calentará (se pondrá menos frío) y el segundo se enfriará.

Por esto es completamente posible enfriar o calentar hielo con hielo.

Pero calentar agua hirviendo con otra porción de agua hirviendo (a la misma presión) es imposible, ya que, a una presión determinada, la temperatura del agua hirviendo es siempre la misma.

¿Se puede hervir agua en agua hirviendo?

Coja una botella pequeña (un tarro o un frasquito), eche agua en ella y métala en una cacerola que contenga agua pura, y que esté puesta a la lumbre, de modo que la botella no toque el fondo de la cacerola. Para esto tendrá que colgar la botella con un alambre. Cuando el agua de la cacerola comienza a hervir parece que, acto seguido, también hervirá el agua de la botella. Pero puede esperar cuanto quiera, el agua de la botella se calentará, se pondrá muy caliente, pero hervir, no hervirá. El agua hirviendo está poco caliente para hacer que hierva el agua de la botella.

Este resultado parece sorprendente, pero, sin embargo, era previsible. Para hacer que el agua hierva no basta calentarla hasta 100° C, hay que comunicarle además una reserva considerable de calor que se llama calor latente. El agua pura hierve a 100° C; en condiciones normales, por mucho que se caliente, su temperatura no sube de este punto. Por lo tanto, la fuente de calor que utilizamos para calentar el agua de la botella tiene la temperatura de 100° C y sólo puede calentarla hasta 100° C. En cuanto se establece este equilibrio de temperaturas, *el agua de la cacerola deja de ceder calor a la de la botella.* Así, pues, calentando de este modo el agua de la botella es imposible darle la cantidad de calor latente que necesita para que pase de agua a vapor (cada gramo de agua calentado hasta

100° C requiere más de 500 calorías[1]) más para pasar al estado de vapor). Esta es la causa de que el agua de la botella, aunque se caliente, no llegue a hervir.

Puede plantearse la pregunta: ¿en qué se distingue el agua de la botella del agua de la cacerola? ¿No es acaso el agua de la botella lo mismo que la otra, sólo que separada de masa restante por la pared de vidrio? ¿Por qué, entonces, no ocurre con ella lo mismo que con el agua restante?

Porque la pared de vidrio impide que el agua que hay dentro de la botella participe en las corrientes que remueven toda el agua en la cacerola. Cada partícula del agua que hay en la cacerola puede entrar en contacto directo con su fondo caldeado, en cambio, el agua de la botella sólo está en contacto con el agua hirviendo.

De esto se deduce que con agua pura hirviendo no se puede hacer que hierva el agua. Pero en cuanto se echa en la cacerola un puñado de sal, las circunstancias cambian. El agua salada no hierve a 100° C, sino a una temperatura un poco mayor y, por lo tanto, puede a su vez hacer que hierva el agua pura que hay en la botella.

¿Puede hacerse hervir agua con hielo?

«Si el agua hirviendo no sirve para este fin, para qué hablar de la nieve» —dirá algún lector. Pero no se apresure a responder, haga antes el experimento siguiente, aunque sea con la misma botella que utilizó en la experiencia anterior.

Eche en ella agua hasta la mitad y sumérjala en *agua salada* hirviendo. Cuando el agua de la botella empiece a hervir, sáquela de la cacerola y tápela rápidamente con un tapón bien ajustado, que debe preparar previamente. Ahora invierta la botella y espere a que cese la ebullición dentro de ella. Cuando llegue este instante, eche sobre la botella agua hirviendo: el agua no hervirá. Pero si pone sobre su fondo un poco de nieve o, simplemente, vierte sobre él agua fría, como muestra la fig. 97, verá que el agua empieza a hervir...

Figura 97

---

[1]) Caloría es la unidad de cantidad de calor. Caloría pequeña es la cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura de 1 g de agua en 1°.

La nieve hace lo que para el agua hirviendo era imposible. Esto es tanto más misterioso, por cuanto, si se toca la botella, no está muy caliente, sino más bien templada. Y sin embargo, ve usted con sus propios ojos que el agua hierve dentro de ella.

El secreto consiste en que la nieve enfría las paredes de la botella y, como resultado de esto, el vapor se condensa dentro de ella y forma gotas de agua. Pero como el aire que había dentro de la botella fue expulsado durante la ebullición, el agua está ahora sometida a una presión mucho menor. Por otra parte, sabemos que, cuando disminuye la presión que actúa sobre un líquido, éste hierve a temperatura más baja. Así, pues, aunque lo que tenemos en la botella es agua hirviendo, *no está caliente*.

Si las paredes de la botella (o frasco) son muy delgadas, la condensación instantánea del vapor puede provocar una especie de estallido, porque la presión del aire exterior, al no encontrar resistencia dentro de la botella, puede aplastarla (por esto la palabra «estallido» no es la más apropiada en este caso). Para evitar esto es preferible usar un frasco esférico (un matraz de fondo convexo, por ejemplo), en este caso el aire presionará sobre una «bóveda».

Figura 98

No obstante, lo más seguro es hacer este experimento con una lata de las que sirven de envase al petróleo, aceite, etc. Después de hervir en una de estas latas un poco de agua, atorníllele bien el tapón y vierta sobre ella agua fría. La lata llena de vapor será aplastada inmediatamente por la presión del aire exterior, ya que al enfriarse el vapor que hay dentro de ella, se transforma en agua.

La lata quedará abollada por la presión del aire lo mismo que si le hubiesen dado un fuerte martillazo (fig. 98).

El huevo caliente en la mano

¿Por qué no quema la mano un huevo recién sacado del agua hirviendo? El huevo recién sacado del agua hirviendo está húmedo y caliente. El agua, al evaporarse de la superficie caliente del huevo, enfría su cáscara y la mano no siente el calor. Pero esto ocurre solamente en el primer instante, hasta que el huevo se seca, después de lo cual se deja sentir su alta temperatura.

Cómo se quitan las manchas con la plancha

¿En qué se funda el quitar de los tejidos las manchas de grasa con una plancha?

El quitar de los vestidos las manchas de grasa calentándolas se basa en que la tensión superficial de los líquidos disminuye al elevarse la temperatura. «Por esto, si la temperatura es distinta en las diversas partes de la mancha, la grasa tiende a desplazarse de las partes calientes hacia las frías. Si a una de las caras de la tela aplicamos un hierro caliente, y a la otra un papel de algodón, la grasa pasará a dicho papel» (Maxwell, «Teoría del calor»).

Por consiguiente, el material que ha de absorber la grasa debe colocarse en la parte opuesta a la que se aplica la plancha.

¿Hasta qué distancia se ve desde los puntos altos?

Cuando estamos de pie en un sitio llano vemos la tierra hasta un límite determinado. Este límite se llama «línea del horizonte». Los árboles, las casas y demás objetos altos situados más del horizonte no se ven enteros, sino sólo sus partes superiores; sus partes bajas las tapa la convexidad de la tierra. Porque las tierras llanas y el mar liso, aunque parecen completamente planas, son en realidad convexas y sustituyen una parte de la superficie curva de la esfera terrestre.

¿Hasta qué distancia ve la tierra un hombre de estatura media que esté de pie en un sitio llano?

Puede ver solamente hasta 5 km de distancia en todas las direcciones. Para ver hasta más lejos hay que subir más alto. Un jinete puede ver en un llano hasta 6 km de distancia. Un marinero, subido a un mástil a 20 m de altura, ve el mar hasta 16 km alrededor suyo. Desde lo alto de un faro que se eleve sobre el agua a 60 m, se verá el mar hasta casi 30 km de distancia.

Los que pueden observar la tierra y el mar hasta más lejos son, claro está, los aviadores. Desde 1 km de altura se abre una perspectiva, en todas las direcciones, de casi 120 km, si no estorban las nubes o la niebla. Elevándose a una altura dos veces mayor, el aviador verá a su alrededor, con unos buenos gemelos, hasta 160 km. Y desde 10 km de altura se ve hasta 380 km.

Para los aeronautas soviéticos que se elevaron en el globo estratosférico «Osoaviajim-1» hasta 22 km, la tierra se extendía en todas las direcciones hasta 560 km.

¿Dónde chirría el grillo?

Siente usted a alguien en medio de una habitación, véndele los ojos y pídale que se esté tranquilo y no vuelva la cabeza. Después, coja dos monedas y hágalas sonar en distintos sitios de la habitación, pero que se encuentren aproximadamente a la misma distancia de los dos oídos de su camarada. Que pruebe a acertar el sitio donde sonaron las monedas. No lo conseguirá: si las monedas sonaron en un rincón de la habitación, su amigo señalará un punto completamente opuesto.

Si se aparta usted hacia un lado, el error no será ya tan grande: ahora su camarada percibirá el sonido con más fuerza por el oído que está más cerca, y gracias a esto podrá determinar de dónde procede el sonido.

Este experimento explica por qué es tan difícil encontrar un grillo que chirría entre la hierba. Su agudo sonido se oye a dos pasos de usted, por la derecha. Mira usted hacia allá, pero no ve nada; el sonido se oye ya claramente por la izquierda. Vuelve usted la cabeza hacia allí, pero, no bien lo hubo hecho, cuando el sonido le llega desde un tercer punto cualquiera. La extraordinaria agilidad del grillo puede dejarle perplejo, y cuanto más de prisa vuelva la cabeza hacia el lado del chirrido, tanto más rápidos serán estos saltos del músico invisible. En realidad el insecto está tranquilamente en su sitio, y sus saltos son consecuencia de una ilusión acústica. Su error consiste en que, al volver la cabeza, la coloca precisamente de manera, que el grillo se encuentra a igual distancia de sus oídos. En estas condiciones (como ya lo sabe por el experimento que hemos descrito antes) es fácil equivocarse, porque si el chirrido del grillo suena delante de usted, le parecerá, erróneamente, que suena por el lado contrario.

Por consiguiente, si quiere usted saber de dónde procede el chirrido de un grillo, el cucú del cuclillo u otros sonidos lejanos, no vuelva los ojos hacia el lado del sonido, sino al contrario, mire en otra dirección. Esto es precisamente lo que hacemos cuando, como suele decirse, «aguzamos el oído».

El eco

Cuando un sonido emitido por nosotros se refleja en una pared u otro obstáculo, retorna y llega de nuevo a nuestro oído, percibimos el *eco*. Este sólo puede ser claro si entre la emisión del sonido y su retorno media un intervalo de tiempo que no sea demasiado corto. De lo contrario el sonido reflejado se confunde con el inicial y lo intensifica; en este caso se dice que el sonido «resuena» como, por ejemplo, en las habitaciones grandes que están vacías.

Figúrese que está usted en un sitio abierto y que enfrente exactamente, a 33 m, hay una casa. Dé una palmada: el sonido recorrerá los 33 m, se reflejará en la pared y retornará. ¿Cuánto tardará en esto? Como recorrió 33 m de ida y otro tanto de vuelta, o sea, 66 m en total, regresará al cabo de 66 : 330, es decir, de 1/5 de segundo. El ruido emitido fue tan corto, que duró menos de 1/5 de segundo, es decir, antes de que llegara el eco, por lo que ambos sonidos no se confundieron y pudieron oírse separadamente. Cada palabra monosílaba, como «sí» o «no», tarda en pronunciarse, aproximadamente, 1/5 de segundo; por esto el eco *monosílabo* lo percibimos si nos hallamos del obstáculo a 33 m. El de las palabras *bisílabas* se confunde a esta distancia con el sonido de la palabra, reforzándola, pero haciendo que pierda claridad; este eco no se oye separado.

¿A qué distancia debe estar el obstáculo para que pueda oírse claramente el eco de palabras *bisílabas* como, por ejemplo, «hurra» u «olé»? La pronunciación de estas palabras dura 2/5 de segundo. En este tiempo el sonido tiene que llegar hasta el obstáculo y retornar, es decir, tiene que recorrer el doble de la distancia que hay hasta el obstáculo. Pero en 2/5 de segundo, el sonido recorre $330 \times 2/5$, o sea, cerca de 132 m.

La mitad de esta cantidad (66 m) es la distancia mínima hasta el obstáculo capaz de originar el eco bisílabo.

Ahora usted mismo puede calcular que para el eco trisílabo se necesita una distancia de cien metros.

Las botellas musicales

Si usted tiene oído musical no le será difícil construir con botellas ordinarias una especie de xilófono, en el que podrá tocar melodías sencillas. La fig. 99 muestra lo que hay que hacer. De una pértiga, sujeta horizontalmente en dos sillas, se cuelgan 7 botellas con agua. La primera botella está llena casi por completo; las siguientes van teniendo cada vez menos agua que la anterior, y la última está casi vacía.

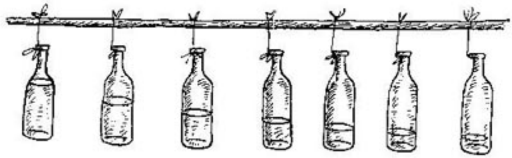


Figura 99

Golpeando estas botellas con un palo seco, podrá hacer que emitan tonos de distinta altura. Cuanto menos agua haya en la botella, tanto más alto será el tono. Por esto, añadiendo o quitando agua, podrá conseguir que los tonos constituyan una gama musical. Contando con una octava, en este instrumento de botellas pueden interpretarse algunas melodías sencillas.

El ruido de las conchas

¿Por qué suena una taza o una concha grande cuando nos la aplicamos al oído?

El ruido que se oye cuando aplicamos al oído una taza o una concha grande se debe a que la concha es un *resonador* que refuerza los numerosos ruidos del medio que nos rodea, que de ordinario no percibimos a causa de su debilidad. Este ruido compuesto recuerda el rumor del mar, lo que ha dado origen a muchas leyendas acerca del zumbido de las conchas.

¿Cómo se ve a través de la palma de la mano?

Coja con la mano izquierda un tubo hecho de papel enrollado, manténgalo delante del ojo izquierdo y mire a través de él algún objeto lejano. Al mismo tiempo mantenga la palma de la mano derecha delante del ojo derecho, de modo que casi toque al tubo. Las dos manos deben estar a unos 15—20 cm de los ojos. En estas condiciones podrá usted comprobar que su ojo derecho ve perfectamente a través de la palma de la mano, como si en ella se hubiera recortado un agujero redondo.

¿A qué se debe este fenómeno?

La causa de este inesperado efecto es la siguiente. Su ojo izquierdo se dispuso a ver a través del tubo el objeto lejano y, en concordancia con esto, su cristalino se adaptó para mirar una cosa lejana (o, como suele decirse, el ojo se fijó). Los ojos están estructurados y funcionan de tal forma, que siempre actúan de común acuerdo, tanto el uno como el otro.

En el experimento que explicamos, el ojo derecho también se adapta a la visión lejana, por lo que la palma de la mano, como está cerca, no la ve claramente. Concretamente, el ojo izquierdo ve claramente el objeto lejano y el derecho no distingue la palma de la mano. Y como resultado, a usted le parece que ve el objeto lejano a través de la mano que lo tapa.

Con los gemelos

Usted está en la costa y mira con los gemelos cómo una barquilla se acerca en línea recta a la costa. Sus gemelos son de tres aumentos. ¿En cuántas veces le parecerá a usted que aumenta la velocidad con que se aproxima la barca?

Para aclarar el problema, supondremos que la barca fue vista cuando se hallaba a 600 m de distancia y que se mueve con una velocidad de 5 m por segundo. Con los gemelos, de tres aumentos se verá la barca a 600 m del mismo tamaño que si estuviera a 200 m. Al cabo de un minuto se habrá aproximado $5 \times 60 = 300$ m y estará a 300 m del observador, y con los gemelos se verá del mismo tamaño que si estuviera a 100 m. Por lo tanto, para el observador con gemelos, la barca habrá recorrido $200 - 100 = 100$ m, mientras que en realidad recorrió 300 m. De aquí se deduce claramente que la velocidad con que se aproxima la barca vista con los gemelos no sólo no se triplica, sino que, al contrario disminuye en tres veces.

El lector puede comprobar que a esta misma conclusión se llega con otros datos, es decir, con otra distancia inicial, otra velocidad de la barca y otro intervalo de tiempo.

Así, pues, la velocidad con que se aproxima la barca, observada con los gemelos, disminuye tantas veces como estos aumentan los objetos.

¿Delante o detrás?

Hay muchos objetos de uso doméstico que suelen emplearse mal. Ya hemos dichos antes que algunos no saben utilizar el hielo y ponen las bebidas a enfriar sobre él en vez de colocarlas *debajo*. Pero resulta que tampoco todos saben emplear un simple espejo. A menudo, queriendo verse mejor en el espejo, colocan la lámpara *detrás*, para «alumbrar su imagen», en vez de alumbrarse a sí mismos. El 99 por ciento de las mujeres proceden así.

Nuestra lectora será, indudablemente, la centésima, que comprende que la lámpara debe ponerla *delante* de ella.

El dibujo delante del espejo

La falta de identidad entre la imagen reflejada en el espejo y el original, se pone aún más de manifiesto en el siguiente experimento.

Ponga verticalmente sobre la mesa un espejo, coloque delante de él un papel e intente dibujar cualquier figura, por ejemplo, un rectángulo con sus diagonales. Pero no lo haga mirando directamente a su mano, sino a los movimientos de la imagen reflejada en el espejo.

Se convencerá de que esto que parece tan sencillo es una tarea casi imposible de realizar. Al cabo de muchos años, nuestras impresiones visuales y nuestro sentido de los movimientos han llegado a una coordinación determinada. El espejo altera esta relación, ya que ante nuestros ojos hace aparecer invertidos los movimientos de la mano. Nuestras antiquísimas costumbres se revelarán contra cada uno de estos movimientos: si usted quiere trazar una raya hacia la derecha, su mano tirará hacia la izquierda, y así ocurrirá siempre.

Todavía serán más las cosas raras que note si, en vez de un dibujo sencillo, quiere trazar una figura más compleja o escribir algo mirando los renglones en el espejo. La confusión que resulta es francamente cómica.

Las impresiones que quedan en el papel secante también son imágenes simétricas. Fíjese en ellas e intente leerlas, no entenderá ni una palabra, aunque la letra sea clara: las letras tienen una rara inclinación hacia la izquierda y; sobre todo, los trazos se suceden de un modo distinto a como estamos acostumbrados. Pero acérquele al papel un espejo, de modo que forme con él un ángulo recto, y verá en él todas las letras escritas tal como estamos acostumbrados a verlas. El espejo da una imagen simétrica de lo que de por sí es una impresión, también simétrica, de un escrito ordinario.

El terciopelo negro y la nieve blanca

¿Qué es más claro, el terciopelo negro un día de sol o la nieve pura una noche de luna?

Al parecer no hay nada más negro que el terciopelo negro ni nada tan blanco como la nieve. Sin embargo, estos antiguos ejemplos clásicos de negro y blanco, de obscuro y claro, se manifiestan completamente distintos cuando se someten a un aparato físico imparcial, el fotómetro. Entonces resulta, por ejemplo, que el terciopelo más negro a los rayos del sol es *más claro* que la nieve más pura en una noche de luna.

Esto se debe a que una superficie negra, por muy obscura que parezca, no absorbe totalmente todos los rayos de luz visible que inciden sobre ella. Incluso el negro de humo y el de platino, que son las pinturas más negras que se conocen, dispersan cerca del 1—2% de la luz que sobre ellas incide. Admitamos la cifra 1% y consideremos que la nieve dispersa el 100% de la luz incidente (lo que, indudablemente, supone una exageración)[1]). Se sabe que la iluminación que da el sol es 400 000 veces más intensa que la que da la luna. Por lo tanto, el 1% de luz solar que dispersa el terciopelo negro es mil veces más intensa que el 100% de luz de la luna dispersado por la nieve. En otras palabras, el terciopelo negro a la luz del sol es mucho más claro que la nieve iluminada por la luna.

Lo dicho se refiere, claro está, no sólo a la nieve, sino también a las mejores pinturas blancas (la más clara de las cuales, el *litopón*, dispersa el 91% de la luz incidente). Y como ninguna superficie, si no está incandescente, puede reflejar más luz que la que sobre ella incide, y la luna nos envía 400 000 veces menos luz que el sol, es inconcebible que exista una pintura blanca que a luz de la luna sea objetivamente más clara que la pintura más negra un día de sol.

¿Por qué es blanca la nieve?

¿Por qué es blanca la nieve a pesar de que está formada de cristalitos de hielo transparentes?

La nieve tiene color blanco por la misma razón que parece blanco el vidrio molido y, en general, todas las substancias transparentes trituradas. Machaque usted hielo en un mortero o ráspelo con un cuchillo y obten-

[1]) La nieve reciente sólo dispersa cerca del 80% de la luz que incide sobre ella.

drá polvo de color blanco. Este color se debe a que los rayos de luz, al penetrar en los diminutos trocitos de hielo transparente, no pasan a través de ellos, sino que se reflejan dentro, en los límites de las partículas de hielo con el aire (reflexión interna total). Y la superficie que dispersa desordenadamente en todos los sentidos los rayos de luz que inciden sobre ella, es percibida por el ojo como blanca.

Por consiguiente, la causa del color blanco de la nieve es su fraccionamiento. Si los intervalos entre las partículas de nieve se llenan de agua, ésta pierde su color blanco y se hace transparente Este experimento no es difícil de hacer: si echa usted nieve en un tarro y añade agua, ante sus ojos, la nieve blanca se convertirá en incolora, es decir, en transparente.

El brillo de una bota limpia

¿Por qué brilla una bota limpia? Ni el betún negro ni el cepillo tienen nada que pueda crear brillo. Por esto, este fenómeno es para muchos una especie de incógnita.

Para descubrir el secreto hay que comprender en qué se diferencia una superficie brillante de otra mate. Se piensa generalmente que la superficie pulida es lisa, mientras que la mate es rugosa. Esto no es cierto: rugosas son tanto la una como la otra. Superficies absolutamente lisas no existen. Si pudiéramos observar al microscopio una superficie pulimentada veríamos un cuadro semejante al que ofrece al microscopio el filo de una cuchilla de afeitar; a un hombre achicado 10 millones de veces, la superficie lisamente pulida de una lámina le parecería un lugar montuoso. Desigualdades, ahondamientos y arañazos existen en cualquier superficie, sea mate o pulimentada. Lo importante es la *magnitud* de estas desigualdades. Si son menores que la longitud de onda de la luz incidente, los rayos se reflejan correctamente, es decir, conservando los ángulos de inclinación mutua que tenían antes de la reflexión. Esta superficie produce imágenes especulares, brilla y recibe el nombre de pulida. En cambio, si las desigualdades son mayores que la longitud de onda de la luz incidente, la superficie dispersa mal los rayos, es decir, sin que se conserven los ángulos iniciales de inclinación mutua; esta dispersión de la luz no da imágenes especulares ni reflejos, y la superficie se llama mate.

De aquí se deduce que una superficie puede ser pulida para unos rayos y mate para otros. Para los rayos de la luz visible, cuya longitud media de onda es igual a media micra (0,0005 mm), una superficie con irregularidades menores que la medida indicada será pulimentada; para los rayos infrarrojos, cuya longitud de onda es mayor, también será pulimentada; pero para los ultravioletas, que tienen una longitud de onda menor, será mate.

Volvamos ahora al prosaico tema de nuestro problema: ¿por qué brilla una bota limpia? La superficie del cuero no recubierta de betún tiene estructura rugosa con desigualdades de mayor tamaño que la longitud de onda de la luz visible, por lo tanto es mate. La substancia fluida del betún, que se unta formando una capa delgada sobre la superficie rugosa del cuero, alisa sus desigualdades y aplaca las asperezas. El cepillado elimina de los salientes el betún sobrante y rellena los huecos que hay entre ellos; con esto disminuyen las desigualdades hasta unas dimensiones menores que la longitud de onda de los rayos visibles y la superficie mate se transforma en brillante.

A través de vidrios de colores

¿Qué color tienen las flores rojas cuando se miran a través de un vidrio verde? Y las azules, ¿qué color tienen?

El vidrio verde sólo deja pasar los rayos verdes, y detiene todos los demás; las flores rojas despiden casi exclusivamente rayos rojos. Al mirarlas a través de un vidrio verde no percibimos de sus pétalos ningún rayo de luz, ya que los únicos rayos que emiten son detenidos por este vidrio. Por esto el color parecerá *negro* a través de éste. También se verá negro, como es fácil comprender, el color azul mirado a través del vidrio verde.

El profesor M. Piotrovski, físico, pintor y observador fino de la naturaleza, hace a propósito de esto una serie de indicaciones en su libro «La física en las excursiones estivales»:

«Observando un macizo de flores a través de un vidrio *rojo*, se nota fácilmente que las flores puramente rojas, como, por ejemplo, el geranio, se manifiestan con tanta claridad como si fueran puramente blancas; las hojas verdes parecen completamente negras con brillo metálico; las flores azules (el acónito, por ejemplo) se ven negras hasta tal punto, que apenas se distinguen sobre el fondo negro de las hojas; las flores de color amarillo, rosa y lila aparecen más o menos pálidas.

Si cogemos un vidrio *verde*, vemos las hojas verdes extraordinariamente claras; aún más claras destacan las flores blancas; algo más pálidas se ven las amarillas y las celestes; las rojas parecen de un negro denso; las de color lila y rosa pálido aparecen desvaídas, grises, de modo que, por ejemplo, los pétalos de color rosa claro del escaramujo resultan más obscuros que sus hojas.

Finalmente, a través de un vidrio *azul*, las flores rojas vuelven a parecer negras; las blancas, claras; las amarillas, completamente negras; las celestes y azules, casi tan claras como las blancas.

De aquí se infiere sin dificultad que las flores rojas nos envían en realidad muchos más rayos rojos que todas las demás, las amarillas, aproximadamente la misma cantidad de rayos rojos y verdes, pero muy pocos azules; las de color rosa y púrpura, muchos rayos rojos y azules, pero poco verdes, y así sucesivamente.»

La señal roja

¿Por qué en la práctica de los ferrocarriles se ha elegido la luz roja como señal de alto?

Los rayos rojos, como rayos de mayor longitud de onda, se dispersan menos en las partículas suspendidas en el aire que los de otros colores. Por esta razón los rayos de luz roja penetran hasta más lejos que otros cualesquiera. Y la posibilidad de que la señal de alto sea visible desde más lejos, es una circunstancia de capital importancia para el transporte, porque para tener tiempo de parar el tren, el maquinista tiene que empezar a frenar a una distancia considerable del obstáculo.

En la mayor transparencia de la atmósfera a los rayos de onda larga se basa también la utilización por los astrónomos del filtro infrarrojo para fotografiar los planetas (sobre todo Marte). Los detalles inapreciables en una fotografía ordinaria, se manifiestan claramente en la fotografía sacada a través de un vidrio que sólo deja pasar los rayos infrarrojos; en este último caso se logra fotografiar la propia superficie del planeta, mientras que en el primer procedimiento sólo se fotografía su capa atmosférica.

Otra causa de que se elija el color rojo para la señal de alto consiste en que nuestro ojo es más sensible a este color que al azul o al verde.

ILUSIONES OPTICAS

Ilusiones ópticas Las ilusiones ópticas a que se dedica este apartado no son concomitancias casuales de nuestra vista, sino que la acompañan en condiciones rigurosamente determinadas, con la constancia invariable de un fenómeno regular y se extienden a todo ojo humano normal. El hecho de que al hombre le sea propio, en determinadas condiciones, caer en ilusiones ópticas, es decir, en engaños acerca de la fuente de sus impresiones visuales, no debe considerarse en general como un inconveniente siempre indeseable, como un defecto indiscutible de nuestro organismo cuya eliminación sería conveniente en todos los sentidos. Un pintor no aceptaría esta visión «impecable». Para él, nuestra capacidad para ver, en determinadas condiciones, no lo que hay en realidad, es una circunstancia propicia que enriquece considerablemente los medios representativos del arte.

«Los pintores son los que con más frecuencia saben convertir en provechosa esta percepción ilusoria general y afín a todos —escribía en el siglo XVIII el insigne matemático Euler, y más adelante explicaba—: En ella se basa todo el arte pictórico. Si estuviéramos acostumbrados a juzgar las cosas por la propia verdad, este arte no podría existir, lo mismo que si fuéramos ciegos. En vano consumiría el pintor todo su arte en mezclar colores; nosotros diríamos: en esta tabla hay una mancha roja, una azul, aquí una negra y allí varias líneas blanquecinas; todo estaría en un plano, no se vería en él ninguna diferencia en las distancias y no sería posible representar ni un solo objeto. Cualquier cosa representada en un cuadro nos produciría la misma sensación que una carta escrita en un papel, y puede ser que hasta procurásemos comprender la *significación* de todas las manchas policromas. *Con toda nuestra perfección, ¿no seríamos dignos de lástima al privarnos de la satisfacción que diariamente nos produce un arte tan útil y agradable?*»

Sin embargo, a pesar del vivo interés que representan las ilusiones ópticas para el pintor, el físico, el fisiólogo, el médico, el psicólogo, el filósofo y para toda mente curiosa, hasta ahora no había ninguna

11—0990

publicación que contuviera una colección más o menos completa de ejemplares de ilusiones ópticas[1]).

Este capítulo, dedicado ante todo a un amplio círculo de lectores no especialistas, es un intento de ofrecer una colección de los tipos más importantes de las ilusiones ópticas que pueden observarse a simple vista, sin ninguna clase de dispositivos como el estereoscopio, la tarjeta perforada, etc.

En cuanto a las causas que determinan una u otra ilusión óptica, sólo para muy pocas de ellas existe una explicación indiscutible y sólidamente establecida; a este pequeño grupo pertenecen las debidas a la estructura del ojo: la irradiación, la ilusión de Mariotte (punto ciego), las ilusiones que genera el astigmatismo, etc. Con respecto a la mayoría de las demás ilusiones ópticas podría escribirse mucho —en Occidente existe mucha literatura acerca de ellas— pero nada positivo puede decirse (a excepción de la del retrato).

En calidad de ejemplo aleccionador consideremos la ilusión de los dibujos representados en la fig. 141: los círculos blancos, distribuidos de un modo determinado sobre el fondo negro, parecen desde lejos hexágonos. Por lo visto, se acepta el considerar establecido que esta ilusión se debe totalmente a la llamada irradiación, es decir, a la aparente expansión de las partes blancas (que tiene una explicación física sencilla y clara). «Los círculos blancos, al aumentar de superficie por irradiación, hacen que disminuyan los intervalos negros que hay entre ellos» —escribe el profesor Paul Bert en sus «Lecciones de zoología», teniendo en cuenta que «como cada círculo está rodeado por otros seis, al extenderse, topa con los vecinos y se encuentra encerrado en un hexágono».

Sin embargo, basta fijarse en el dibujo de al lado (véase la fig. 141), donde se observa el mismo efecto con círculos *negros* sobre fondo *blanco*, para renunciar a esta explicación, porque en este caso la irradiación sólo podría disminuir las dimensiones de las manchas

---

[1]) Yo sólo conozco un folleto publicado en Rusia en 1911: *P. M. Oljin*, «La vida y sus ilusiones»; en él se mencionan dos decenas de ilusiones ópticas. (*Nota del autor*).
En la actualidad, sobre este tema se publican sistemáticamente libros de autores soviéticos y extranjeros. Véase П. В. Маковецкий, «Смотри в корень», «Наука», 1968 (*P. V. Makovetski*, «Mire a fondo»), *S. Tolansky*, Optical Illusions, Paris, 1964. (*Nota de la Editorial.*)

negras, pero de ningún modo variar su forma circular por la hexagonal. Para abarcar con un mismo principio estos casos podría proponerse esta explicación: al mirar desde una distancia determinada, el ángulo óptico, según el cual se observan los estrechos intervalos entre los círculos se hace menor que el límite que permite la diferenciación de sus formas, por lo que cada uno de los seis intervalos adyacentes al círculo debe parecer un trazo recto de igual espesor y, por consiguiente, los círculos quedan encuadrados en hexágonos. Con esta explicación también concuerda bien el hecho paradójico de que, a cierta distancia, las partes blancas siguen pareciendo circulares, mientras que la orla negra que hay a su alrededor ha adquirido ya la forma hexagonal; solamente cuando la distancia es todavía mayor, la forma hexagonal de las orlas se transfiere a las manchas blancas. No obstante, esta explicación mía sólo es una suposición verosímil de las varias que seguramente pueden imaginarse. Es necesario demostrar además que la causa *posible* en este caso es la *verdadera*.

Este mismo carácter dudoso y no obligatorio tienen la mayoría de los intentos de hallar una explicación a algunas de las ilusiones ópticas (a excepción de las poquísimas que hemos señalado antes). Para ciertas ilusiones ópticas aún no se ha propuesto ninguna explicación. Para otras, al contrario, hay demasiadas explicaciones, de las cuales cada una por separado podría ser suficiente, si no existieran las demás, que debilitan su carácter convincente. Recordaremos una ilusión óptica muy célebre, discutida ya en los tiempos de Tolomeo, la del aumento de las dimensiones de los astros al pasar por el horizonte. Para explicarla creo que se han propuesto por lo menos seis teorías acertadas, cada una de las cuales no tiene más que un defecto, la existencia de las otras cinco ... tan buenas como ella. Es evidente que casi todo el campo de las ilusiones ópticas se encuentra aún en el estado precientífico de su elaboración y requiere el establecimiento de los principios metódicos fundamentales para su investigación.

Teniendo en cuenta esta carencia de algo sólido y positivo en el campo de las teorías relativas al tema que tratamos, he preferido limitarme solamente a mostrar el indiscutible material de los hechos, absteniéndome de explicar sus causas, pero preocupándome de que en este libro estén representados todos los tipos principales de ilusiones ópticas[1]). Solamente se dan, al final del capítulo, las explicaciones acerca de las ilusiones relacionadas con los retratos, ya que, en este caso, son suficientemente claras e indiscutibles para que se les puedan oponer las ideas supersticiosas que desde muy antiguo se forjaron en torno a esta peculiar ilusión óptica.

La serie de ilustraciones se abre con ejemplos de ilusiones cuya causa se encuentra indudablemente en las particularidades anatómicas y fisiológicas del ojo. Son ilusiones que dependen del punto ciego, la irradiación, el astigmatismo, la persistencia de las imágenes y el cansancio de la retina (véanse las figs. 100-107). En el experimento con el punto ciego, la desaparición de una parte del campo visual puede describirse también por otro procedimiento, como hizo la primera vez Mariotte en el siglo XVIII. En este caso el efecto resulta aún más sorprendente. «Colgué —dice Mariotte— sobre un fondo negro, y a la altura de mis ojos aproximadamente, un pequeño redondel de papel blanco y al mismo tiempo pedí que sostuvieran otro redondel al lado del primero, a la derecha, a unos 2 pies de distancia y un poco más abajo, de modo que su imagen fuera a caer sobre el nervio óptico de mi ojo derecho, mientras entornaba el izquierdo. Me coloqué frente al primer redondel y me fui alejando sin dejar de mirarlo con el ojo derecho. Cuando me encontraba a una distancia de cerca de 9 pies, *desapareció por completo* del campo visual el segundo redondel, que tenía cerca de 4 pulgadas de diámetro.

Yo no podía atribuir esto a su posición lateral, puesto que veía otros objetos que estaban más apartados que él. Podría pensar que lo habían quitado, si no volviera a encontrarlo en cuanto movía un poco el ojo ...»

A estas ilusiones ópticas «fisiológicas» les sigue una clase más numerosa de ilusiones debidas a causas psicológicas que, en la mayoría de los casos, no están aún suficientemente estudiadas. Por lo visto, sólo puede considerarse establecido que las ilusiones de este tipo son consecuencia de falsos juicios preconcebidos de un modo involuntario e inconsciente. El origen de la ilusión es aquí el entendimiento y no los senti-

[1]) Esta selección de ejemplos de ilusiones ópticas la he compuesto como resultado de muchos años de coleccionarlas. Pero he excluido todas las publicadas cuyo efecto no atañe a todo ojo o no se manifiesta con suficiente claridad.

dos. A estos últimos puede aplicárseles la acertada observación de Kant:

«Nuestros sentidos no nos engañan, no porque siempre juzguen bien, sino porque nunca juzgan».

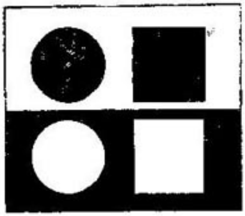


Figura 100

La irradiación. Si se mira desde lejos este dibujo, las figuras de abajo (el círculo y el cuadrado) parecen más grandes que las negras, aunque unas y otras son iguales. Cuanto mayor es la distancia desde la cual se miran, tanto mayor es la ilusión. Este fenómeno se llama *irradiación* (véase más adelante).

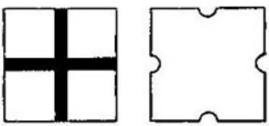


Figura 101

La irradiación. Cuando se mira desde lejos la figura de la izquierda, con la cruz negra, los lados del cuadrado, debido a la irradiación, parece que tienen un rebajo en el centro, como muestra la figura contigua de la derecha. La irradiación se debe a que cada punto claro de un objeto produce en la retina de nuestro ojo no un punto, sino un pequeño circulito (en virtud de la llamada aberración esférica); por esto la superficie blanca resulta cercada en la retina por una franja clara que *aumenta* el sitio ocupado por aquélla. Las superficies negras, en cambio, producen una imagen *disminuida* a espensas del cerco claro que rodea al fondo.

La experiencia de Mariotte. Cierre el ojo derecho y mire con el izquierdo la crucecita *superior* desde una distancia de 20 a 25 centímetros. Notará que el

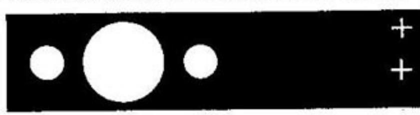


Figura 102

gran círculo blanco que hay en medio desaparece por completo, aunque los dos círculos menores que tiene a los lados se ven bien. Si, no cambiando la posición del dibujo, mira usted la crucecita *inferior*, el círculo sólo desaparecerá parcialmente.

Este fenómeno se debe a que, en la posición indicada del ojo con respecto a la figura, la imagen del círculo coincide con el llamado punto ciego, es decir, con el lugar por donde entra el nervio óptico, que es insensible a las excitaciones luminosas.

El punto ciego. Este experimento es una variante del anterior. Mirando con el ojo izquierdo la cruz que hay en la parte derecha de la fig., 103 a cierta distancia

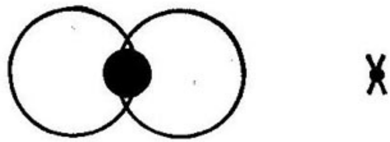


Figura 103

no veremos en absoluto el círculo negro, aunque distinguiremos las dos circunferencias.

<u>El atigmatismo.</u> Mire estas letras con un ojo. ¿Son todas iguales de negras? Por lo general una de ellas parece más negra que las demás. Pero no hay más

Figura 104

que hacer girar 45 ó 90° la figura, para que sea otra letra la que parece más negra.

La causa de este fenómeno es el astigmatismo, es decir, la desigual convexidad de la córnea del ojo en distintas direcciones (vertical, horizontal). Raro es el ojo que está exento totalmente de esta imperfección.

<u>El astigmatismo.</u> La figura 105 ofrece otro procedimiento (véase la ilusión anterior) de descubrir el astigmatismo de un ojo. Aproximándola al ojo que se reconoce (teniendo cerrado el otro), a cierta distancia bastante cercana nos damos cuenta que dos de los sectores contrapuestos parecen más negros que los otros dos, que resultarán grises.

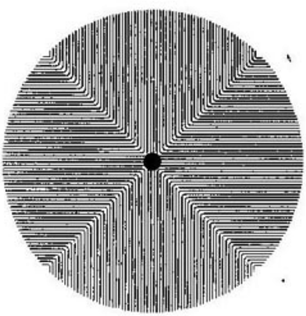


Figura 105

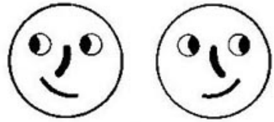


Figura 106

Mire la figura 106 y muévala a derecha e izquierda. Le parecerá que los ojos del dibujo corren de un lado para el otro.

Esta ilusión se explica por la propiedad que tiene el ojo de conservar la impresión óptica durante un corto espacio de tiempo, una vez que desaparece el objeto que la produce, es decir, por la persistencia de las imágenes en la retina (en esto se basa la acción del cinematógrafo).

Concentrando la vista en el cuadradito blanco que hay arriba en la fig. 107, al cabo de *medio minuto* aproximadamente, notará que desaparece la franja blanca que hay abajo (debido al cansancio de la retina).

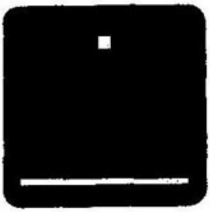


Figura 107

La ilusión de Müller-Lier. El segmento *bc* parece más largo que el *ab*, aunque en realidad son iguales.

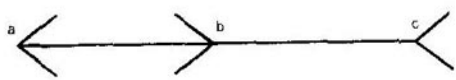


Figura 108

Una variante de la ilusión anterior: la recta vertical *A* parece más corta que la recta igual que ella *B*.

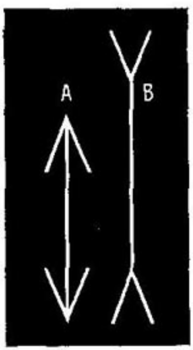


Figura 109

La cubierta del barco de la derecha parece más corta que la del de la izquierda. No obstante, están representadas por líneas rectas iguales.

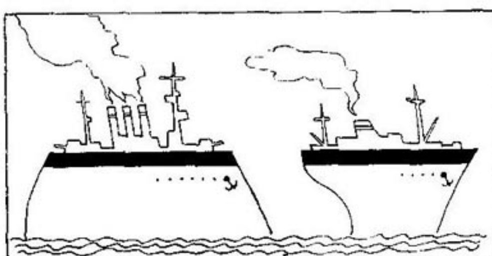


Figura 110

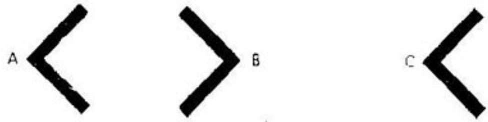


Figura 111

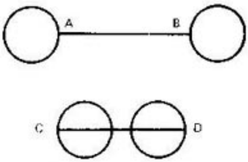


Figura 112

La distancia AB parece mucho menor que la BC, que es igual que ella.

La distancia AB parece mayor que la igual a ella CD (fig. 112).

El óvalo de abajo (fig. 113) parece mayor que el interior de arriba, aunque son iguales (influencia de las condiciones).

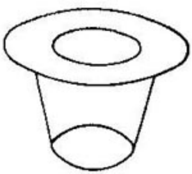


Figura 113

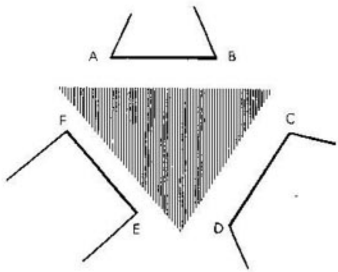


Figura 114

Las distancias iguales AB, CD y EF parecen desiguales (influencia de las condiciones).

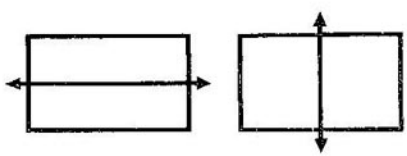


Figura 115

El rectángulo cruzado a lo largo (a la izquierda) parece más largo y más estrecho que su igual cruzado transversalmente.

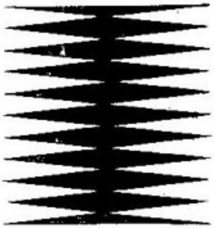


Figura 117

Figura 118

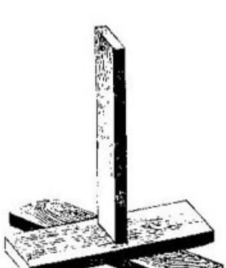


Figura 121

Figura 116

Las figuras A y B son dos cuadrados iguales, aunque la primera parece más alta y estrecha que la segunda.

La altura de la figura 117 parece mayor que su anchura, aunque son iguales.

La altura del sombrero de copa parece mayor que su anchura, a pesar de que son iguales.

Las distancias AB y AC son iguales, sin embargo, la primera parece más larga.

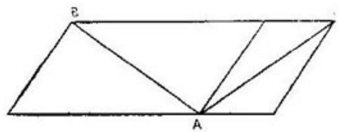


Figura 119

Las distancias BA y BC son iguales, pero la primera parece más larga.

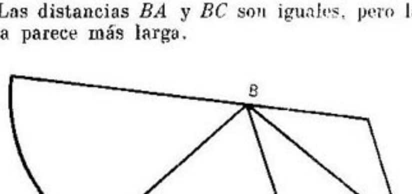


Figura 120

El listón vertical, estrecho, parece más largo que los que hay debajo, más anchos; en realidad son iguales (fig. 121).

La distancia *MN* parece **menor que la igual** que ella *AB*.

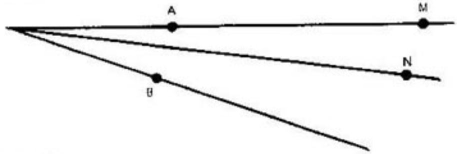


Figura 122

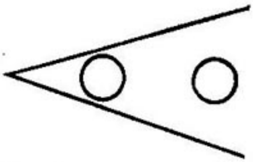


Figura 123

El círculo de la derecha de la figura 123 parece menor que el de la izquierda, que es igual que él.

La distancia *AB* (fig. 124) parece menor que la igual que ella *CD*. La ilusión aumenta cuando la figura se mira desde lejos.

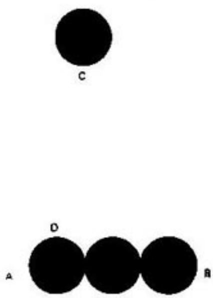


Figura 124

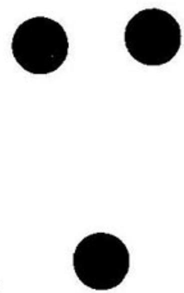


Figura 125

El espacio vacío entre el círculo de abajo y cada uno de los de arriba (fig. 125) parece mayor que la distancia que hay entre las partes exteriores de los bordes de los círculos de arriba. En realidad son iguales.

La ilusión de la «pipa». Las rayas de la derecha parecen más cortas que las de la izquierda, aunque todas son iguales.

Figura 126

La ilusión de los tipos de imprenta. Las mitades superior e inferior de cada una de estas letras pa-

X38S

Figura 127

recen ser iguales. Pero, dándole la vuelta a la figura, se nota fácilmente que las mitades superiores son menores.

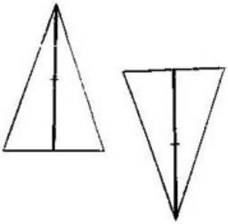


Figura 128

Las alturas de los triángulos de la fig. 128 están cortadas por la mitad, aunque parece que la parte próxima al vértice es más corta.

La ilusión de Poggendorf. La línea recta *oblicua* que corta las franjas negras y blancas, desde lejos parece quebrada.

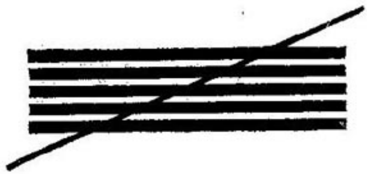


Figura 129

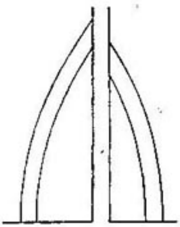


Figura 130

Si se prolongan los arcos de la derecha (fig. 130), se encontrarán con los extremos superiores de los arcos de la izquierda, a pesar de que parece que pasarán más abajo.

El punto *c* (fig. 131), que se halla en la prolongación de la recta *ab* parece que está situado más abajo.

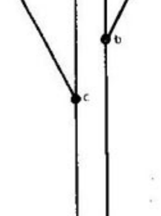


Figura 131

Estas dos figuran son completamente iguales, aunque la de arriba parece más corta y más ancha que la de abajo.

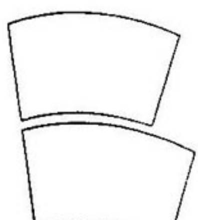


Figura 132

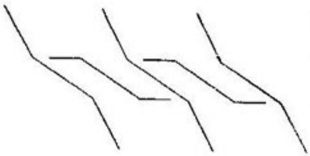


Figura 133

Las partes medias de estas líneas son rigurosamente paralelas, aunque no lo parezca.

La ilusión de Zellner. Las líneas largas y oblicuas de la figura 134 son paralelas, aunque parece que son divergentes.

La ilusión de Hering. Las dos líneas de en medio, que van de derecha a izquierda, son rectas paralelas, a pesar de que parecen arcos con sus partes convexas enfrentadas.

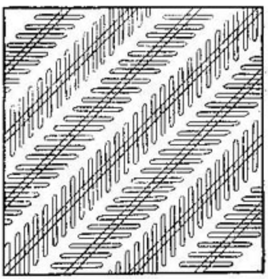


Figura 134

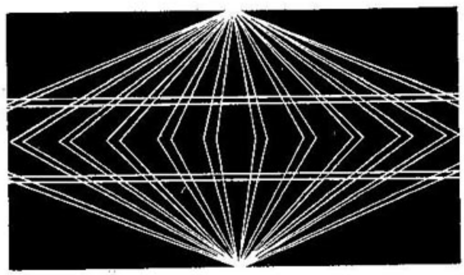


Figura 135

La ilusión desaparece: 1) si se coloca la figura a la altura de los ojos y se mira de tal modo, que la vista resbale a lo largo de las líneas; 2) si se pone la punta de un lapicero en un punto cualquiera de la figura y se fija la vista en este punto.

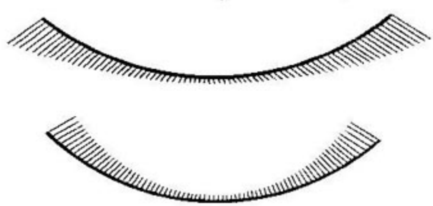


Figura 136

El arco de abajo parece más convexo y corto que el de arriba. No obstante, ambos son iguales.

Los lados del triángulo parecen cóncavos; en realidad son rectos.

Estas letras están derechas.

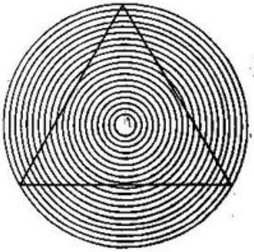


Figura 137

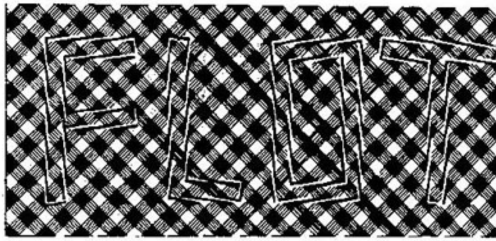


Figura 138

Las curvas de la fig. 139 perecen espirales, pero son circunferencias. De esto es fácil convencerse pasando a lo largo de ellas un palito afilado.

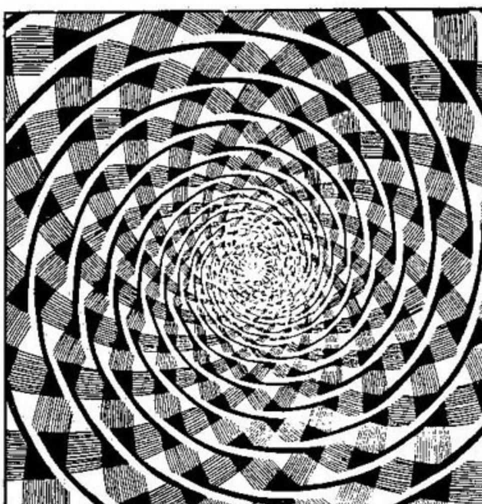


Figura 139

Las curvas de esta figura parecen ovaladas; en realidad son circunferencias, como puede comprobarse con un compás.

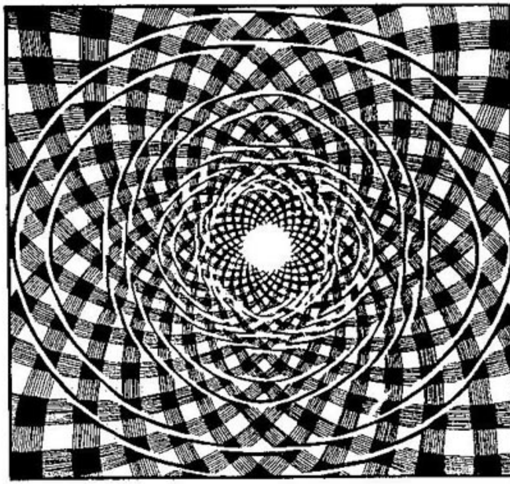


Figura 140

A cierta distancia los círculos de estas figuras (tanto los blancos como los negros) parecen hexágonos.

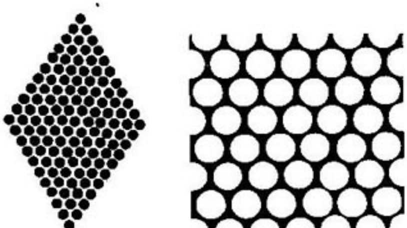


Figura 141

La ilusión de la autotipia. Cuando esta retícula se mira desde lejos, se distingue en ella fácilmente el ojo y parte de la nariz de un rostro femenino.

La figura es parte de una autotipia (ilustración ordinaria de un libro) aumentada 10 veces.

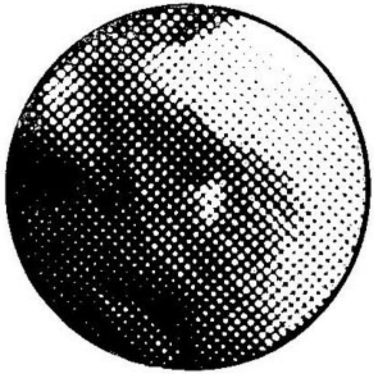


Figura 142

La silueta superior parece más larga que la inferior, aunque sus longitudes son idénticas.

Figura 143

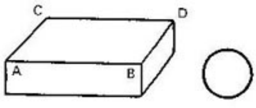


Figura 144

¿Cabe entre las rectas *AB* y *CD* el círculo aquí representado? A simple vista parece que sí. En realidad el círculo es más ancho que la distancia entre dichas líneas.

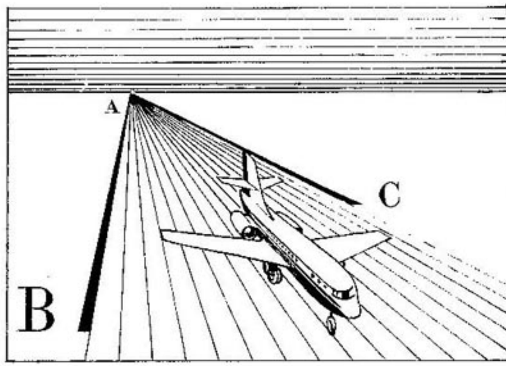


Figura 145

La distancia *AB* parece mayor que la igual a ella *AC*.

Si el dibujo de arriba (fig. 146) se coloca al nivel del ojo y se mira de modo que la vista resbale a lo largo de ella, se ve el dibujo representado abajo.

Coloque usted un ojo (después de cerrar el otro) aproximadamente en el punto de intersección de las prolongaciones de las líneas de la fig. 147. Verá

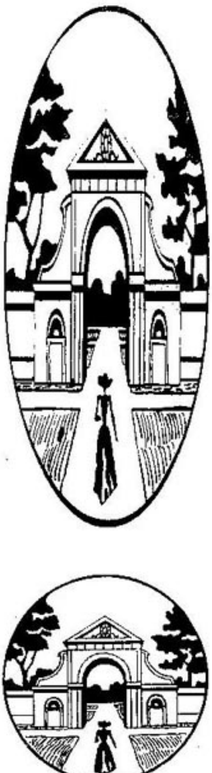


Figura 146

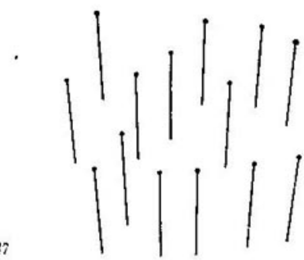


Figura 147

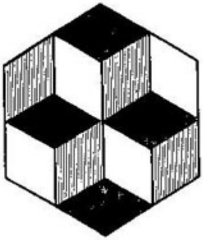


Figura 148

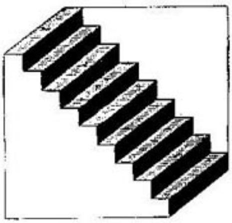


Figura 149

una serie de alfileres hincados en el papel. Si mueve el dibujo de un lado para otro, parece que los alfileres se balancean.

Mirando durante cierto tiempo la figura 148, le parecerá a usted que sobresalen sucesivamente ya dos cubos hacia arriba, ya dos cubos hacia abajo. Haciendo un esfuerzo mental podrá provocar una u otra imagen a voluntad.

La escalera de Schroeder. Esta figura puede interpretarla de tres modos: 1) como una escalera, 2) como un hueco o rebajo en una pared, y 3) como una tira de papel plegada como un acordeón y extendida diagonalmente. Estas imágenes pueden sustituirse unas a otras arbitrariamente o según su voluntad.

Esta figura puede representar, según su deseo, un tarugo de madera con un rebajo (la pared posterior del rebajo es AB), un tarugo con una espiga saliente (la cara delantera de la espiga es AB), o parte de una caja vacía, abierta por abajo, a cuyas paredes está pegada por dentro una tablilla.

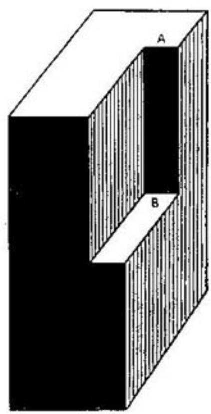


Figura 150

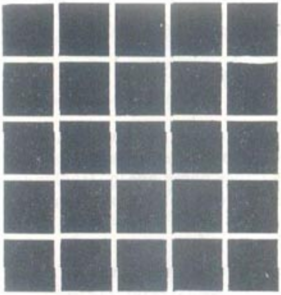


Figura 151

En las intersecciones de las franjas blancas de la figura 151 aparecen y desaparecen, como si centelleasen, unas manchitas grisáceas. En realidad las franjas son completamente blancas en toda su longitud, de lo cual es fácil convencerse tapando con papel las filas contiguas de cuadrados negros. Esto se debe al contraste.

La figura 152 es una variante de la ilusión de la figura anterior, pero aquí, en los cruces de las franjas negras, aparecen manchitas blancas.

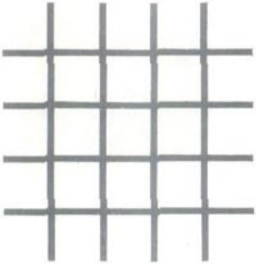


Figura 152

Figura 153

Cuando esta figura se mira de lejos, sus cuatro franjas parecen canales cóncavos; estas franjas se nos figuran más claras junto al borde contiguo a la franja vecina más obscura. Pero tapando las franjas adyacentes, y evitando de este modo la influencia del contraste, puede comprobarse que cada una de las franjas está rayada uniformemente.

Figura 154

Mire fijamente, durante un minuto, a cualquier punto de este retrato «negativo» (de Newton) sin mover los ojos; después pase rápidamente la vista a un papel en blanco o al fondo gris claro de la pared o del techo y verá usted durante un instante ese mismo retrato, pero con sus manchas negras convertidas en blancas y viceversa.

La ilusión de Silvanius Thompson. Si esta figura se hace girar (dándole vueltas al libo), todos los círculos y la blanca rueda dentada parecerá que giran, cada uno alrededor de su centro, en el mismo sentido y a la misma velocidad.

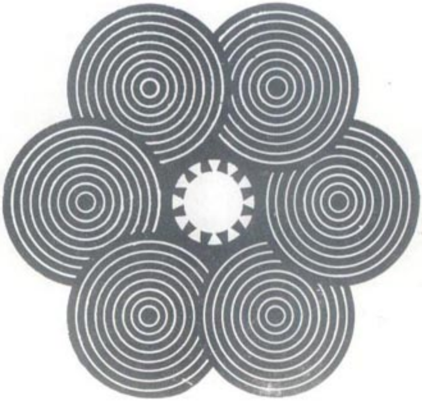


Figura 155

A la izquierda ve usted una cruz convexa, a la derecha otra ahuecada. Pero ponga la figura al revés, y las cruces permutarán sus puestos. En realidad los dos dibujos son idénticos, pero han sido sometidos a giros distintos.

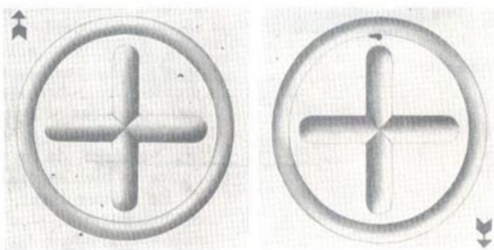


Figura 156

Figura 157

Figura 158

Mire esta fotografía con un ojo, colocándolo frente a su centro y a 14—16 cm de distancia.

Cuando el ojo está en la posición indicada, ve la imagen desde el mismo punto que el objetivo de la cámara fotográfica «vio» al original. El paisaje adquiere profundidad y el agua, brillo.

Los ojos y el dedo parecen que se dirigen directamente a usted y que le siguen cuando se desvía del dibujo hacia la derecha o hacia la izquierda.

La curiosa peculiaridad de algunos retratos que parece que siguen con los ojos al que los mira y que hasta vuelven toda la cara hacia él, cualquiera que sea el punto desde el cual observa el retrato, es conocida desde muy antiguo. A esta peculiaridad, que asusta a los pusilámines, le atribuyen algunos ciertas propiedades sobrenaturales y ha originado toda una serie de ideas y leyendas supersticiosas y de narraciones fantásticas (véase «El Retrato» de N. V. Gógol). Sin embargo, la causa de esta interesante ilusión óptica es bien sencilla.

En primer lugar, esta ilusión no sólo es peculiar de los retratos, sino también de otros cuadros. Un cañón dibujado o fotografiado de manera que apunte al que lo mire[1]), volverá su boca hacia él cuando se retire hacia la derecha o hacia la izquierda. Un coche representado como dirigiéndose al observador, no hay manera de esquivarlo.

Todos estos fenómenos tienen una causa común y extraordinariamente simple. Si en un cuadro vemos la boca de un cañón dibujado de manera que apunta directamente hacia nosotros, al desviarnos hacia un lado lo seguiremos viendo en la misma posición que tenía; esto es completamente natural en las imágenes planas, lo contrario sería absurdo; pero cuando se trata de un cañón de verdad, esto sólo puede ocurrir si gira hacia nuestro lado. Y como quiera que cuando miramos el cuadro pensamos no en él, sino en los objetos reales que él representa, nos parece que dicho objeto cambió de posición.

Esto se refiere también a los retratos. Si la cara está representada de modo que nos mire directamente, y después de apartarnos hacia un lado volvemos a mirar el cuadro, veremos que la posición de aquella con respecto a nosotros no ha cambiado (lo mismo que no ha cambiado nada en el cuadro); en otras palabras, notamos que parece que la cara se ha vuelto hacia nosotros, porque si un rostro vivo se mira desde un lado, lo vemos de otra forma, y sólo podremos verlo como antes si se vuelve hacia nosotros. Cuando el cuadro es bueno, el efecto que produce es sorprendente.

Está claro que no es extraño que los retratos tengan esta propiedad. Lo que sería extraño es que no la tuvieran. En efecto, ¿no sería acaso maravilloso que, al desviarse hacia un lado del retrato, viera usted la parte lateral de la cara? Pues esto, es, en esencia, lo que esperan todos aquellos que consideran sobrenatural el supuesto giro de la cara del retrato.

[1]) Este tipo de fotografía se obtiene si, al tomar la vista, la boca del cañón apuntaba al objetivo. Del mismo modo, si el que se retrata mira directamente al objetivo al hacerse la fotografía, sus ojos mirarán después al observador, cualquiera que sea el punto desde donde mire al retrato.

6 DISTRIBUCIONES Y TRANSPOSICIONES DIFICILES

En seis filas

Usted conocerá probablemente el cuento de cómo nueve caballos fueron puestos en 10 pesebres y en cada pesebre resultó haber un caballo. El problema que ahora se plantea es semejante por su forma a esta broma célebre, pero tiene una solución[1]) completamente real, y no imaginaria como aquélla. El problema es el siguiente: distribuir 24 hombres en seis filas, de modo que en cada fila haya cinco hombres.

En nueve casillas

Este es un problema en broma, medio problema, medio truco. Haga con cerillas un cuadrado con nueve casillas y ponga en cada casilla una moneda, de modo que en cada fila y en cada columna haya 6 copeikas (fig. 159).

Figura 159

La figura muestra cómo hay que distribuir las monedas. Sobre una de las monedas ponga una cerilla.

Hecho esto, déle a sus camaradas la siguiente tarea: sin tocar la moneda en que descansa la cerilla, variar la colocación de las demás, de modo que en cada fila y en cada columna siga habiendo, lo mismo que antes, 6 copeikas.

Le dirán que esto es imposible. Pero con un poco de astucia logrará usted este «imposible». ¿Cómo?

Un cambio de monedas

Trace a tamaño mayor el dibujo representado en la fig. 160, y designe cada una de sus casillas con una letra en un ángulo. En las tres casillas de la fila superior ponga monedas de cobre: de 1 copeika, 2 copeikas y 3 copeikas. En las tres casillas de la fila inferior coloque monedas de plata: de 10 copeikas, 15 copeikas y 20 copeikas. Las demás casillas estarán vacías.

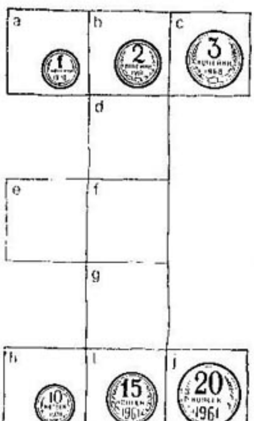


Figura 160

Ahora propóngase la siguiente tarea: pasando las monedas a las casillas libres, conseguir que las monedas de cobre y las de plata cambien entre sí de puestos:

---

[1]) En adelante las soluciones de los problemas se dan al final de cada capítulo.

la de 1 copeika, con la de 10 copeikas; la de 2 copeikas, con la 15; y la 3 copeikas, con la de 20. Puede usted ocupar cualquier casilla libre del dibujo, pero no se tolera poner dos monedas en una casilla. Tampoco se puede saltar por encima de una casilla ocupada ni salirse fuera de los límites de la figura.

El problema se resuelve con una larga serie de pasos. ¿Cuáles son?

Nueve ceros

Nueve ceros se hallan dispuestos así:

0 0 0
0 0 0
0 0 0

El problema consiste en tachar todos los ceros trazando solamente cuatro líneas rectas.

Para facilitar la resolución del problema añadiré que los nueve ceros se tachan sin levantar la pluma del papel.

Treinta y seis ceros

0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

En las casillas de esta cuadrícula se han distribuido, como puede ver, 36 ceros.

Hay que tachar 12 ceros, pero de tal modo que, después de esto, en cada fila y en cada columna quede el mismo número de ceros sin tachar.

¿Qué ceros hay que tachar?

Dos damas

En un tablero de damas vacío hay que colocar dos damas distintas. ¿Cuántas posiciones diferentes pueden ocupar estas dos damas en el tablero?

Las moscas en el visillo

En un visillo a cuadros se posaron nueve moscas. Casualmente se colocaron de tal manera que, en ninguna fila, horizontal, vertical u oblicua, había más de una mosca (fig. 161).

Al cabo de unos minutos tres de las moscas cambiaron de sitio, pasándose a cuadros contiguos que estaban vacíos; las otras seis moscas permanecieron donde estaban antes. Y ocurrió una cosa curiosa: a pesar de que tres moscas pasaron a ocupar otros puestos, las nueve volvieron a encontrarse de

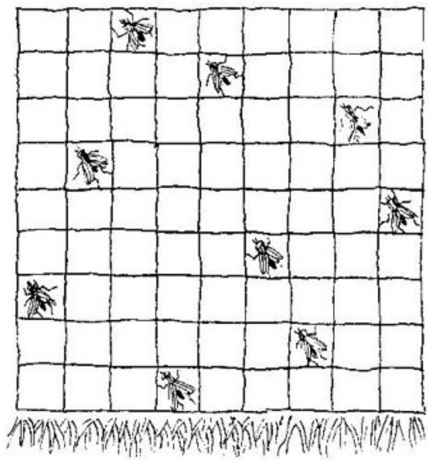


Figura 161

modo que, en ningula fila, horizontal, vertical u oblicua, había más de una mosca.

¿Puede usted decir qué tres moscas cambiaron de sitio y cuáles fueron los cuadrados que eligieron?

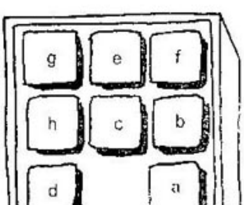


Figura 162

Ocho letras

Las ocho letras colocadas en la casilla del cuadrado representado en la fig. 162 deben ponerse en orden alfabético, desplazándolas sucesivamente hacia la casilla libre. Conseguir esto no es difícil, si no se limita el número de jugadas. Pero el problema consiste en lograr la ordenación indicada en el menor número de jugadas posible. El lector debe deducir cuál es este número mínimo de jugadas.

Las ardillas y los conejos

Ante usted, en la fig. 163, hay ocho tocones numerados. En los tocones *1* y *3* se han sentado unos conejos, en los *6* y *8*, unas ardillas. Pero tanto a las ardillas como a los conejos no les gustan los puestos que ocupan; quieren cambiar de tocones: las ardillas quieren pasarse a los sitios de los conejos, y éstos a los de aquéllas.

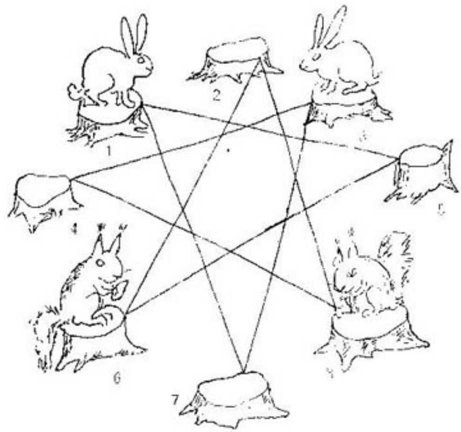


Figura 163

Pueden hacer esto saltando de un tocón a otro, pero únicamente siguiendo las líneas marcadas en el dibujo.

¿Cómo pueden hacerlo?

Recuerde las reglas siguientes:

1) de un tocón a otro sólo puede saltarse siguiendo las líneas indicadas en el dibujo: cada animal puede saltar varias veces seguidas:

2) dos animales no pueden estar en un mismo tocón, es decir, sólo se puede saltar a un tocón que esté libre.

Tenga también en cuenta que los animales quieren intercambiar sus sitios dando el menor número de saltos posible. Sin embargo, en menos de 16 saltos no pueden hacerlo.

Dificultades de la casa de campo

El dibujo adjunto representa el plano de una pequeña casa de campo, en cuyas reducidas habitaciones se encuentran los muebles siguientes: una mesa de escritorio, un piano de cola, una cama, un aparador y un armario de libros. Hasta ahora sólo hay una habitación sin muebles, la número *2*.

Figura 164

Al inquilino de la casa de campo le fue necesario cambiar de sitio el piano de cola y el armario de los libros. Esto resultó ser un problema nada fácil: las habitaciones eran tan pequeñas, que dos de las cosas mencionadas no cabían al mismo tiempo en ninguna de ellas. La situación pudo salvarse con ayuda de la habitación *2*, que estaba vacía. Pasando los muebles de una habitación a otra se logró al fin la transposición deseada. ¿Cómo puede hacerse el cambio proyectado con el menor número de traslaciones posible?

Los tres caminos Tres hermanos, Pedro, Pablo y Jacovo recibieron tres parcelas de tierra para cultivarlas como huerta. Las parcelas estaban juntas y no lejos de las casas respectivas. En la fig. 165 puede verse la disposición de las casas de Pedro, Pablo y Jacovo y la de sus parcelas de tierra. Se nota en seguida que la situación de las parcelas no es la más cómoda para los que las trabajan, pero los hermanos no pudieron llegar a un acuerdo de cambio.

Cada uno hizo su huerta en su parcela y los caminos más cortos entre las casas y éstas se cortaban entre sí.

Figura 165

Pronto empezaron los altercados entre los hermanos, que al fin acabaron disgustándose. Para evitar posibles encuentros, cada hermano resolvió buscar un camino hasta su huerta que no cortara los caminos de los otros. Al cabo de largas búsquedas hallaron tres caminos que reunían estas condiciones y ahora van cada día a sus parcelas sin encontrarse.

¿Puede usted indicar estos caminos?

Existe una condición obligatoria: los caminos no deben pasar más allá de la casa de Pedro.

Los ardides de la guardia

Este problema tiene muchas variantes. Damos una de ellas.

La tienda de campaña del jefe la custodia una guardia alojada en ocho tiendas. Al principio en cada una de estas tiendas había tres soldados. Después se permitió que los soldados de unas tiendas pudieran ir a visitar a los de otras. Y el jefe de la guardia no imponía sanciones cuando al entrar en las tiendas encontraba en unas más de tres soldados y en otras, menos. Se limitaba a comprobar el número de soldados que había *en cada fila* de tiendas: si en las tres tiendas de cada fila había en total nueve soldados, el jefe de la guardia consideraba que todos los soldados estaban presentes.

Los soldados se dieron cuenta de esto y encontraron el modo de burlarse del jefe. Una noche se marcharon cuatro soldados de la guardia y su ausencia no fue

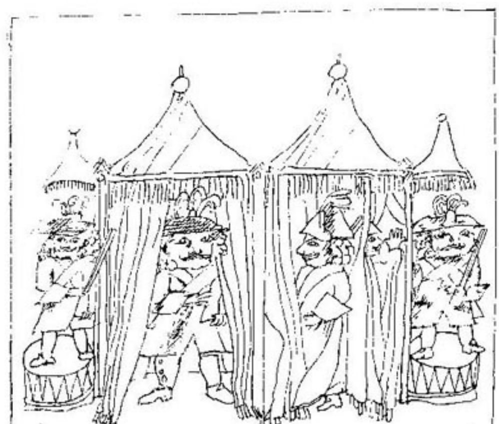


Figura 166

notada. La noche siguiente se fueron seis, que tampoco sufrieron castigo. Más tarde los soldados de la guardia incluso empezaron a invitar a otros a que vinieran a visitarles: en una ocasión invitaron a cuatro, en otra, a ocho, y una tercera vez, a toda una docena. Y todas estas astucias pasaron desapercibidas, ya que en las tres tiendas de cada fila el jefe de la guardia contaba en total nueve soldados. ¿Cómo se las componían los soldados para hacer esto?

Los diez castillos Un regidor de la antigüedad quiso construir diez castillos unidos entre sí por murallas; estas murallas debían extenderse formando cinco líneas rectas con cuatro castillos en cada una. El constructor que invitó le presentó el plano que puede ver en la fig. 167.

Pero al regidor no le gustó este proyecto, porque con esta disposición se podía llegar desde fuera a cualquiera de los castillos, y él quería que, si no todos, por lo menos uno o dos castillos estuvieran protegidos de las incursiones por la muralla. El constructor objetó que era imposible satisfacer esta condición, puesto

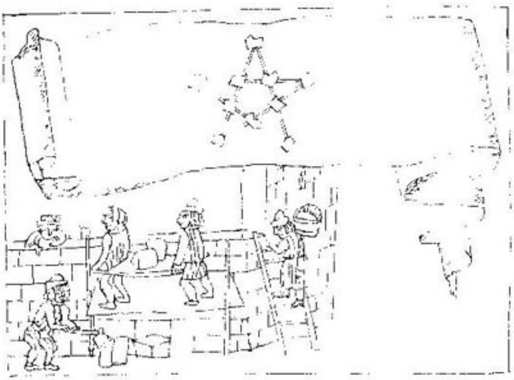


Figura 167

que los diez castillos debían disponerse de modo que en cada una de las cinco murallas hubiera cuatro de ellos. A pesar de esto, el regido insistió en su deseo.

El constructor se rompió la cabeza con este problema, y al cabo de bastante tiempo logró resolverlo.

Intente usted encontrar una disposición tal de los 10 castillos y las cinco murallas rectas que los unen, que satisfaga la condición impuesta.

El huerto frutal

En un huerto había 49 árboles. En la fig. 168 puede verse cómo estaban dispuestos. Al hortelano le pareció que había demasiados árboles y quiso despejar el huerto, cortando los árboles que sobraban, para plantar mejor los cuadros de flores. Llamó a un peón y le ordenó:

—Deja nada más que cinco filas de a cuatro árboles cada una. Los demás árboles, córtalos y, en pago de tu trabajo, quédate con la leña.

Cuando terminó la corta, salió el hortelano y miró el trabajo. ¡El huerto estaba casi arrasado! En vez de 20 árboles, el peón sólo había dejado 10, y había cortado 39.

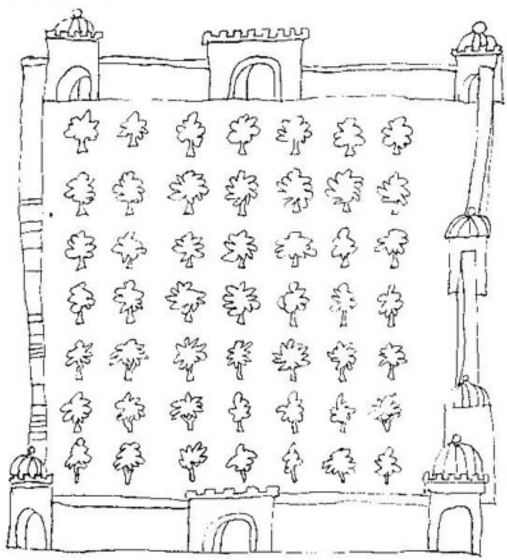


Figura 168

—¿Por qué has cortado tantos? —le riñó el hortelano— ¡Yo te dije que dejases 20!

—No, señor, usted no me dijo «20»; lo que me ordenó fue que dejara cinco filas de a cuatro árboles. Y así lo he hecho. Mírelo usted.

En efecto, el hortelano comprobó con sorpresa que los 10 árboles que quedaron de pie, formaban cinco filas de a cuatro árboles cada una. La orden había sido cumplida al pie de la letra y, a pesar de esto, en vez de 29 árboles, el peón había cortado 39.

¿Cómo pudo hacer esto?

Figura 169

El ratón blanco Los 13 ratones (fig. 169) que rodean a este gato están condenados a ser devorados por él. Pero el gato se los quiere ir comiendo en un orden determinado, a saber: cada vez cuenta los ratones en el sentido en que miran los roedores y al que hace 13 se lo come.

¿Por qué ratón deberá empezar, para que el último que se coma sea el blanco?

190-191

En seis filas

La condición que impone el problema es fácil de satisfacer si los hombres se colocan formando un hexágono, como indica la fig. 170.

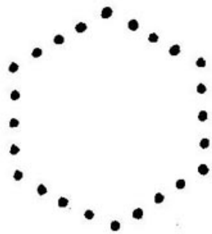


Figura 170

En nueve casillas

No toque la moneda prohibida, pero pase toda la fila inferior de casillas a la parte superior (fig. 171). La disposición habrá cambiado, pero la condición impuesta por el problema queda cumplida: la moneda con la cerilla encima no se ha movido de su sitio.

Figura 171

Un cambio de monedas

He aquí la serie de movimientos que hay que hacer para lograr el objetivo (el número indica la moneda y la letra, la casilla a la cual se traslada):

2 — c	15 — i	2 — d	10 — a
15 — b	3 — g	1 — h	3 — c
10 — d	20 — c	10 — e	15 — b
2 — h	1 — c	2 — j	2 — d
20 — e	3 — a	15 — i	3 — j
10 — j	15 — b	3 — g	2 — i

En menos de 24 transiciones es imposible resolver el problema.

Nueve ceros

El problema se resuelve como muestra la fig. 172.

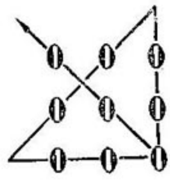


Figura 172

Treinta y seis ceros

Como de los 36 ceros hay que tachar 12, deben quedar 36 — 12, es decir 24. Por consiguiente, en cada fila o columna deberán quedar cuatro ceros.

La distribución de los ceros no tachados será:

0		0	0	0	
		0	0	0	0
0	0	0			0
0	0		0		0
0	0			0	0
	0	0	0	0	

Dos damas

La primera dama puede colocarse en cualquiera de las 64 casillas del tablero, es decir, de 64 modos. Una vez que la primera dama se ha colocado, la segunda puede ponerse en cualquiera de las 63 casillas restantes. Por consiguiente, a cada una de las 64 posiciones que puede ocupar la primera dama hay que añadir las 63 posiciones que puede ocupar la segunda. De aquí se deduce que el número total de posiciones diferentes que pueden ocupar las dos damas en el tablero será:

$$64 \times 63 = 4032$$

Las moscas en el visillo

Las flechas indican, en la fig. 173, las moscas que cambiaron de sitio y los cuadrados de que partieron.

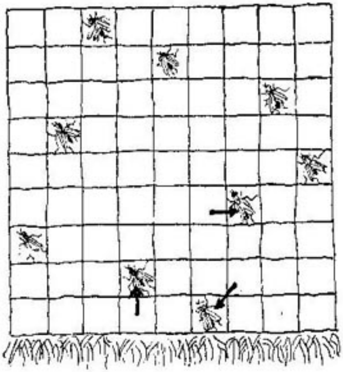


Figura 173

Ocho letras

El número mínimo de jugadas es 23, y son:

A B F E C A B F E C A B D H G A B D H G D E F.

Las ardillas y los conejos

A continuación se indica el procedimiento más corto de cambio. Las cifras indican desde qué tocón a qué tocón hay que saltar (por ejemplo, 1 — 5 significa que la ardilla salta del primer tocón al quinto). El total son necesarios 16, a saber:

1 — 5; 3 — 7; 7 — 1; 5 — 6; 3 — 7; 6 — 2; 8 — 4; 7 — 1;
8 — 4; 4 — 3; 6 — 2; 2 — 8; 1 — 5; 5 — 6; 2 — 8; 4 — 3.

Dificultades de la casa de campo

El cambio consigue hacerse mediante 17 traslaciones como mínimo. Los muebles deben trasladarse en el orden siguiente:

1. El piano.
2. El armario.
3. El aparador.
4. El piano.
5. La mesa.
6. La cama.
7. El piano.
8. El aparador.
9. El armario.
10. La mesa.
11. El aparador.
12. El piano.
13. La cama.
14. El aparador.
15. La mesa.
16. El armario.
17. El piano.

Los tres caminos

Los tres caminos que no se cortan se ven en la fig. 174.

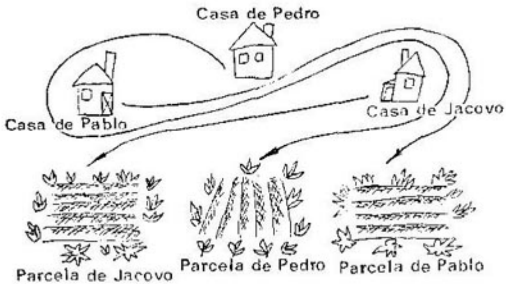


Figura 174

Pedro y Pablo tienen que seguir caminos bastante sinuosos, pero así se evitan los encuentros enojosos entre los hermanos.

Los ardides de la guardia

La solución del problema se halla fácilmente si se razona como sigue. Para que cuatro soldados puedan ausentarse sin que lo note el jefe de la guardia es necesario que en las filas *I* y *III* (fig. 175,*a*) haya nueve soldados en cada una; pero como el número

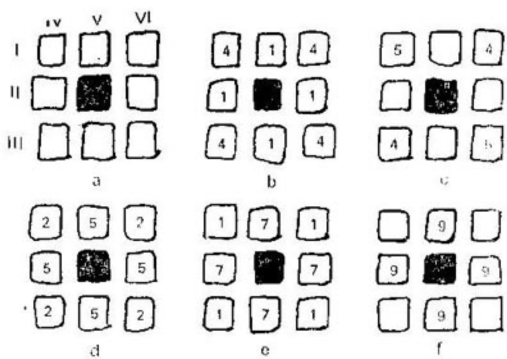


Figura 175

total de soldados será $24 - 4 = 20$, en la fila *II* deberá haber $20 - 18 = 2$, es decir, un soldado en la tienda de la izquierda de esta fila y otro soldado en la de la derecha. Del mismo modo hallamos que en la tienda superior de la columna *V* debe haber un soldado y en la inferior, otro. Ahora está claro que en las tiendas de las esquinas tendrá que haber cuatro soldados en cada una. Por consiguiente, la distribución buscada para el caso en que se ausentan cuatro soldados será la que se ve en la fig. 175,b.

Por medio de análogos razonamientos se encuentra la distribución necesaria para que puedan ausentarse seis soldados (fig. 175,*c*).

Para cuatro invitados (fig. 175,*d*).

Para ocho invitados (fig. 175,*e*).

Y, finalmente, en la fig. 175,*f* se muestra la distribución en el caso de 12 invitados.

Se ve claramente que, en las condiciones indicadas, no pueden ausentarse impunemente más de seis soldados ni pueden venir a la guardia más de 12 invitados.

Los diez castillos

En la fig. 176 (a la izquierda) se ve la disposición con la cual dos castillos quedan protegidos contra una agresión desde fuera.

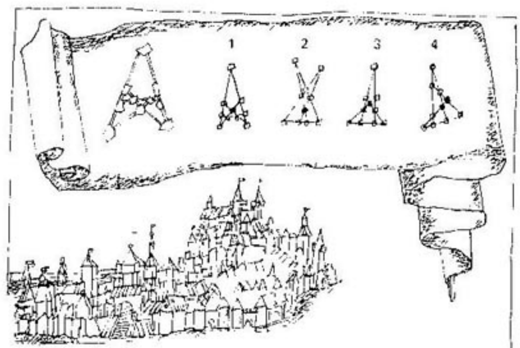


Figura 176

Como puede ver, los 10 castillos están situados aquí como imponían las condiciones del problema: cuatro en cada una de las cinco murallas rectas. La fig. 176 (a la derecha) da cuatro soluciones más a este mismo problema.

El huerto frutal

Los árboles que quedaron sin cortar estaban situados como indica la *fig.* 177; así forman cinco filas rectas y en cada una de ellas hay cuatro árboles.

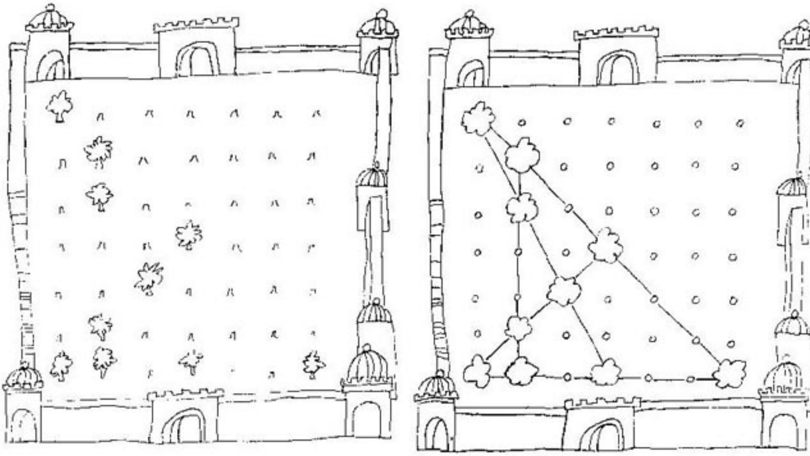


Figura 177

El ratón blanco

El gato debe comerse primero al ratón a que está mirando, es decir, al sexto a partir del blanco.

Empiece a contar desde este ratón, siguiendo la circunferencia, y tache cada decimotercero; se convencerá de que el ratón blanco es el último que tacha.

196-197

Con tres líneas rectas

La fig. 178 debe cortarse, mediante tres líneas rectas, en siete partes, de manera que en cada parte haya un cerdito entero.

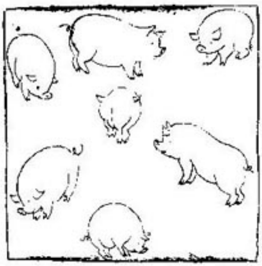


Figura 178

En cuatro partes

Esta parcela de tierra (fig. 179) está formada por cinco parcelas cuadradas de idénticas dimensiones. ¿Puede usted dividirla no en cinco, sino en cuatro parcelas también iguales?

Dibuje usted la parcela en una hoja de papel aparte y busque la solución.

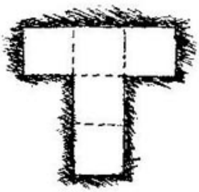


Figura 179

Haga un círculo

A un carpintero le trajeron dos tablas de madera de una especie rara, que tenían sendos agujeros en el centro, y le encargaron que hiciera con ellas un tablero, completamente redondo y continuo, para una mesa, pero de tal modo que no sobrara ni un solo recorte de madera preciosa. Debía aprovechar hasta el último trocito de madera.

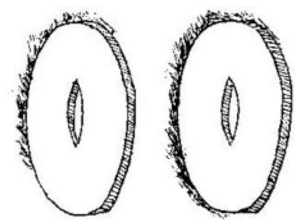


Figura 180

El carpintero era maestro en su oficio, como hay pocos, pero el encargo no era de los fáciles. Pensó mucho el maestro, hizo sus cálculos y, por fin, se dio cuenta de cómo podía cumplir el encargo.

Y usted, ¿no sabría hacerlo? Recorte de un papel dos figuras exactamente iguales que las representadas en la fig. 180 (pero de mayores dimensiones) y pruebe a encontrar con ellas la solución de este problema.

La esfera del reloj

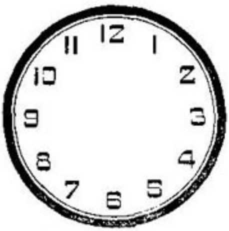


Figura 181

La esfera de este reloj (fig. 181) debe cortarse en seis partes de forma cualquiera, de modo que la suma de los números que haya en cada parte sea la misma. Este problema tiene por objeto probar no tanto su ingeniosidad como su vivacidad.

La media luna

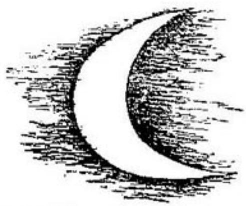


Figura 182

Esta media luna (fig. 182) debe dividirse en seis partes trazando solamente dos líneas rectas.
¿Cómo se hace esto?

La división de la coma

Esto que ve aquí (*fig.* 183) es una coma grande. Su trazado es muy fácil: con centro sobre la recta AB se traza una semicircunferencia y, después, sobre cada mitad del segmento AB se describen dos semicircunferencias, una hacia la derecha y otra hacia la izquierda.

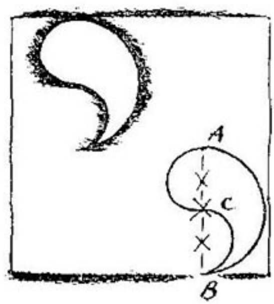


Figura 183

El problema consiste en cortar esta figura en dos partes exactamente iguales por medio de una línea curva.

Esta figura ofrece también interés porque con dos como ella se puede componer un círculo. ¿Cómo?

Desarrolle un cubo

Si corta usted un cubo de cartón siguiendo las aristas, de modo que sea posible desdoblarlo y poner los seis cuadrados sobre la mesa, obtendrá usted una figura parecida a las tres siguientes.

Resulta curioso contar cuántas figuras *distintas* se pueden conseguir por este procedimiento. En otras palabras, ¿cuántas maneras hay de desarrollar un cubo sobre un plano?

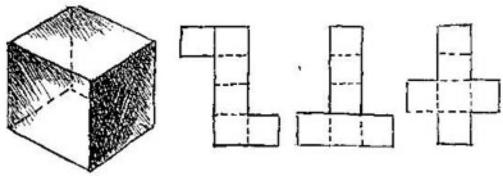


Figura 184

Puedo advertir al lector impaciente que las figuras diferentes no son menos de 10.

Componer un cuadrado

¿Puede usted componer un cuadrado con cinco trozos de papel, cuyas formas sean las que se ven en la fig. 185,*a*?
Si ha comprendido cómo se resuelve este problema, intente componer un cuadrado con cinco triángulos iguales, cuya forma sea la misma que la de los que

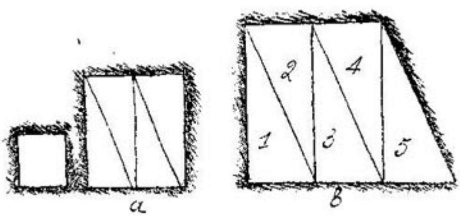


Figura 185

acaba de utilizar (un cateto es doble de largo que el otro). Uno de los triángulos puede cortarlo usted en dos partes, pero los cuatro restantes debe utilizarlos sin cortar (fig. 185,*b*).

SOLUCIONES

Con tres líneas rectas

Solución del problema:

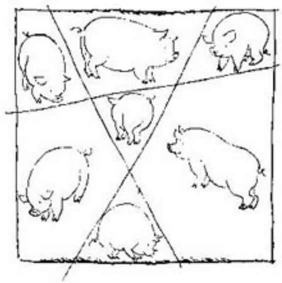


Figura 186

En cuatro partes

Las líneas de trazo punteado indican cómo se puede dividir la parcela de tierra (fig. 187).

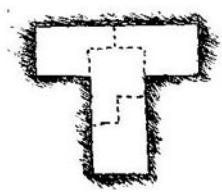


Figura 187

Haga un círculo

El carpintero cortó una de las tablas en cuatro partes, como indica la fig. 188, a la izquierda. De las cuatro partes menores hizo un círculo, a cuyos bordes pegó después los otros cuatro trozos. Resultó un tablero magnífico para una mesita redonda.

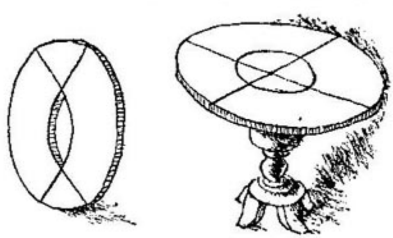


Figura 188

La esfera del reloj

Como la suma de todos los números que figuran en la esfera es igual a 78, los números de cada una de las partes deberán sumar 78 : 6, es decir, 13. Esto facilita la búsqueda de la solución, la cual se da en la fig. 189.

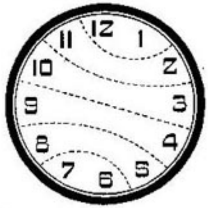


Figura 189

La media luna

Hay que proceder como indica la fig. 190. Se obtienen seis partes, que, para mayor claridad, se han numerado.

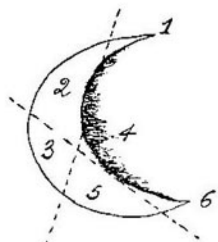


Figura 190

La división de la coma

La solución se ve en la fig. 191. Las dos partes de la coma dividida son iguales entre sí, porque están constituidas de partes iguales.

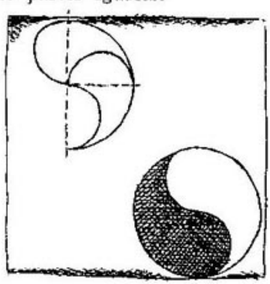


Figura 191

La figura muestra también cómo se forma un círculo con dos comas, una blanca y otra negra.

Desarrolle un cubo

He aquí todos los desarrollos posibles del cubo (fig. 192). Son 10.

Las figuras 1ª y 5ª pueden girarse; esto da dos desarrollos más, con lo que su número total no será 10, sino 12.

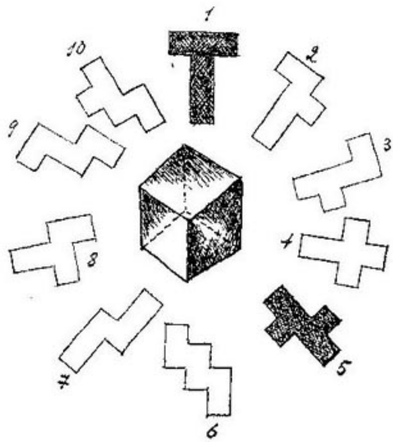


Figura 192

Componer un cuadrado

La solución del primer problema se ve en la fig. 193,*a*. Y la fig. 193,*b* muestra cómo se compone el cuadrado con los cinco triángulos. Uno de ellos se corta previamente como indica el dibujo a la derecha.

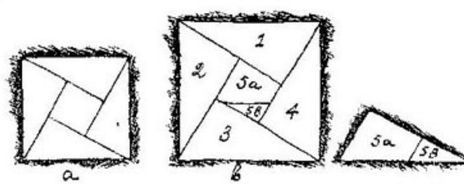


Figura 193

El estanque

Tenemos un estanque cuadrado (fig. 194). En sus ángulos crecen, cerca del agua, cuatro viejos robles. Hay que ensanchar el estanque, haciendo que su superficie sea el doble, conservando su forma cuadrada y sin tocar los viejos robles. ¿Puede agrandarse el estanque hasta las dimensiones deseadas, quedando los robles fuera del agua, en las orillas del nuevo estanque?

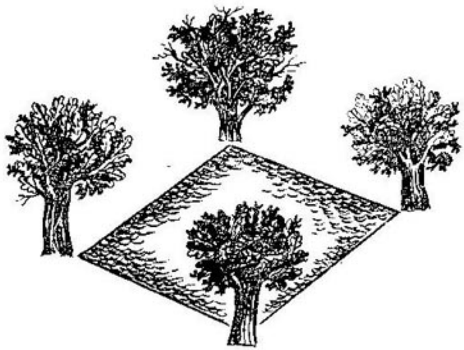


Figura 194

El entarimador

Un entarimador, cuando cortaba los cuadrados de madera los comprobaba así: comparaba las longitudes de los lados, y si los cuatro eran iguales, consideraba que el cuadrado estaba bien cortado.

¿Es segura esta comprobación?

Otro entarimador

Otro entarimador comprobaba su trabajo de un modo distinto: no medía los lados, sino las diagonales de los cuadrados. Si las dos diagonales eran iguales, el entarimador consideraba que el cuadrado estaba bien cortado.

¿Usted piensa lo mismo?

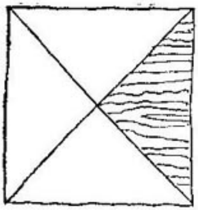


Figura 195

Un tercer entarimador

Un tercer entarimador, al comprobar los cuadrados, se cercioraba de que las cuatro *partes* en que *las diagonales* se *dividen entre sí (fig.* 195) eran iguales. Según él esto demostraba que el cuadrilátero cortado era un cuadrado.

¿Y usted, qué piensa?

La costurera

Una costurera tiene que cortar trozos de lienzo cuadrados. Después de cortar varios trozos, comprueba su trabajo doblando el trozo cuadrangular por una de sus diagonales y viendo si coinciden sus bordes. Si coinciden, quiere decir, según ella, que el trozo cortado tiene exactamente forma cuadrada.

¿Es así en realidad?

Otra costurera

Otra costurera no se contentaba con la comprobación que hacía su amiga. Ella doblaba primero el cuadrilátero cortado por una diagonal, luego desdoblaba el trozo de lienzo y lo doblaba por la otra diagonal. Sólo cuando los bordes de la tela coincidían en ambos casos consideraba ella que el cuadrado estaba bien cortado.

¿Qué dice usted de esta comprobación?

El problema del carpintero

Un joven carpintero tiene una tabla pentagonal como la que representa la fig. 196. Como puede ver, la tabla parece estar formada por un quadrado y un triángulo aplicado a él e igual a su cuarta parte. Al carpintero le hace falta convertir esta tabla, sin quitarle ni añadirle nada, en un cuadrado. Para esto, claro está, hay que cortarla antes en partes. Nuestro joven carpintero piensa hacer esto, pero no quiere cortar la tabla por más de dos líneas rectas.

¿Es posible, con dos líneas rectas cortar la fig. 196 en partes con las cuales se pueda componer un cuadrado? Si es posible, ¿cómo hay que hacerlo?

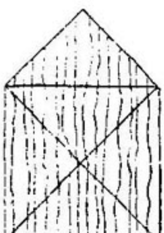


Figura 196

El estanque

La superficie del estanque puede perfectamente duplicarse, conservando su forma cuadrada y sin tocar los robles. En la fig. 197 se muestra como hay que hacerlo: hay que cavar de tal modo que los robles queden frente al punto medio de los lados del nuevo

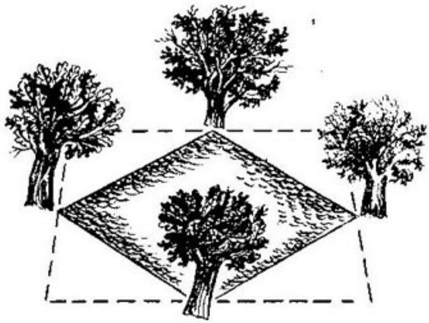


Figura 197

cuadrado. Es fácil convencerse de que el área del nuevo estanque es dos veces mayor que la del antiguo. Para esto no hay más que trazar las diagonales en el estanque viejo y calcular los triángulos que se forman al hacer esto.

El entarimador

Esta comprobación es insuficiente. Un cuadrilátero puede satisfacer esta prueba sin ser cuadrado. En la fig. 198 se dan unos ejemplos de cuadriláteros que tienen todos los lados iguales, pero cuyos ángulos no son rectos (rombos).

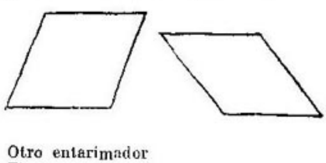


Figura 198

Otro entarimador

Esta comprobación es tan insegura como la primera. El cuadrado, claro está, tiene las diagonales iguales, pero no todo cuadrilátero que tenga las diagonales iguales es un cuadrado. Esto puede verse con toda claridad en los dibujos de la fig. 199.

Los entarimadores debían haber practicado las dos comprobaciones con cada uno de los cuadriláteros que cortaban, con lo cual hubieran podido estar seguros de que el

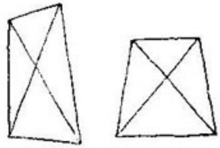


Figura 199

trabajo estaba bien hecho. Todo rombo cuyas diagonales sean iguales será indudablemente un cuadrado.

Un tercer entarimador

Lo único que puede demostrar esta comprobación es que el cuadrilátero que se somete a ella tiene los ángulos rectos, es decir, que es un rectángulo. Pero, en cambio, no prueba que todos sus lados son iguales, como puede verse en la fig. 200.

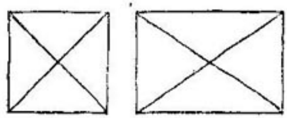


Figura 200

La costurera

La comprobación dista mucho de ser suficiente. En la fig. 201 se han dibujado varios cuadriláteros cuyos bordes coinciden cuando se doblan por una diagonal. Y, sin embargo, no son cuadrados. Como puede ver, un cuadrilátero puede diferir mucho de la figura del cuadrado y, a pesar de esto, satisfacer esta comprobación.

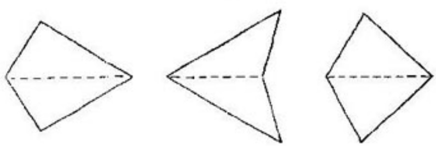


Figura 201

Con esta prueba podemos convencernos de que una figura es simétrica, y nada más.

Otra costurera

Esta comprobación no es mejor que la anterior. Usted puede recortar tantos cuadriláteros de papel como quiera, que, aunque no sean cuadrados, satisfarán esta prueba. Los cuadriláteros de la fig. 202 tienen todos los lados iguales (son rombos), pero sus ángulos no son rectos, por consiguiente, no son cuadrados.

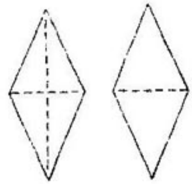


Figura 202

Para cerciorarse de verdad de que el trozo cortado tiene forma cuadrada, además de lo que hacía esta costurera, hay que comprobar si las diagonales (o los ángulos) son iguales.

El problema del carpintero

Una recta debe ir desde el vértice *c* al punto medio del lado *de*, y la otra, desde el punto medio hasta el vértice *a*. Con los trozos obtenidos, *1*, *2* y *3*, se compone el cuadrado como indica el dibujo (fig. 203).

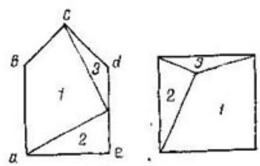


Figura 203

PROBLEMAS ACERCA DEL TRABAJO

Los cavadores

Cinco cavadores en cinco horas cavan 5 m de zanja. ¿Cuántos cavadores serán necesarios para cavar en 100 horas 100 m de zanja?

Los aserradores

Unos aserradores sierran un tronco en trozos de a metro. El tronco tiene 5 m de longitud. El aserrado transversal del tronco requiere cada vez $1^{1}/_{2}$ minutos. ¿En cuántos minutos aserrarán todo el tronco?

El carpintero y los armadores

Una brigada de seis armadores y un carpintero se contrató para realizar un trabajo. Cada armador ganaba 20 rublos y el carpintero, 3 rublos más que el salario medio de cada uno de los siete miembros de la brigada.

¿Cuánto ganaba el carpintero?

Cinco trozos de cadena

A un herrero le trajeron cinco cadenas de tres eslabones

Figura 204

cada una —representadas aquí, en la fig. 204— y le encargaron que las uniera formando una sola cadena. Antes de comenzar el trabajo, el herrero se dio a pensar cuántos eslabones tendría que abrir y volver a soldar. Llegó a la conclusión de que tendría que abrir y soldar de nuevo cuatro eslabones.

¿No sería posible realizar este trabajo abriendo menos eslabones?

¿Cuántos vehículos?

En un taller fueron reparados durante un mes 40 vehículos, entre automóviles y motocicletas. El número total de ruedas de los vehículos reparados fue de 100 exactamente. ¿Cuántos automóviles y cuántas motocicletas se repararon?

La monda de patatas

Dos personas mondaron 400 patatas; una de ellas mondaba tres patatas por minuto, la otra, dos. La segunda trabajó 25 minutos más que la primera.
¿Cuánto tiempo trabajó cada una?

Los dos obreros

Dos obreros pueden hacer un trabajo en siete días, si el segundo empieza a trabajar dos días después que el primero. Si este mismo trabajo lo hiciera separadamente cada obrero, el primero tardaría cuatro días más que el segundo.

¿En cuántos días podría hacer todo el trabajo cada uno de los obreros por separado?

Este problema puede resolverse por procedimientos puramente aritméticos, incluso sin recurrir a operaciones con quebrados.

La copia del discurso

La copia a máquina de un discurso se ha encomendado a dos mecanógrafas. La mecanógrafa más ducha podría hacer todo el trabajo en 2 horas, la de menos experiencia, en 3 horas.

¿En cuánto tiempo copiarán el discurso, si el trabajo se distribuye entre ellas de modo que lo hagan en el menor tiempo posible?

Los problemas de este tipo pueden resolverse siguiendo el modelo de los célebres problemas relacionados con depósitos de agua, a saber: en nuestro caso se halla qué fracción del trabajo realiza en una hora cada mecanógrafa; después, se suman los dos quebrados y se divide la unidad por esta suma.

¿Puede usted proponer otro procedimiento para resolver estos problemas,* distinto del estereotipado?

¿Cómo pesar la harina?

Al gerente de un almacén le fue necesario pesar cinco sacos de harina. En el almacén había una báscula, pero faltaban algunas pesas y era imposible hacer pesadas entre 50 y 100 kg. Los sacos pesaban alrededor de 50—60 kg cada uno.

El gerente no se desconcertó, sino que empezó a pesar los sacos de dos en dos. Con cinco sacos se pueden formar 10 pares distintos; por lo tanto hubo que hacer 10 pesadas. Resultó una serie de números, que reproducimos a continuación en orden creciente:

110 kg, 112 kg, 113 kg, 114 kg, 115 kg,

116 kg, 117 kg, 118 kg, 120 kg, 121 kg.

¿Cuánto pesa cada saco por separado?

Los cavadores

En este problema es fácil picar en el anzuelo: puede pensarse que si cinco cavadores en 5 horas cavan 5 m de zanja, para cavar 100 m en 100 horas hacen falta 100 hombres. Sin embargo, este razonamiento es completamente falso: se necesitan los mismos cinco cavadores, y nada más.

En efecto, cinco cavadores en cinco horas cavan 5 m; por lo tanto, cinco cavadores en 1 hora cavarían 1 m, y en 100 horas, 100 m.

Los aserradores

Con frecuencia responden que en $1^1/_2 \times 5$, es decir, en $7^1/_2$ minutos. Al hacer esto se olvidan que el último corte da *dos* trozos de a metro. Por consiguiente, al tronco de 5 metros hay que darle no cinco cortes tranversales, sino solamente cuatro; en esto se tardará en total $1^1/_2 \times 4 = 6$ minutos.

El carpintero y los armadores

El salario medio de cada miembro de la brigada es fácil de hallar; para esto hay que dividir los 3 rublos de más, en partes iguales, entre los seis armadores. A los 20 rublos de cada uno hay que añadir, pues, 50 copeikas[1]); éste será el salario medio de cada uno de los siete.

De esto deducimos que el carpintero ganaba 20 rublos con 50 copeikas + 3 rublos, es decir, 23 rublos con 50 copeikas.

Cinco trozos de cadena

Basta abrir los *tres eslabones* de uno de los trozos y unir con ellos los extremos de los otros cuatro.

¿Cuántos vehículos?

Si todos los vehículos hubieran sido motocicleta, el número total de ruedas sería 80, es decir, 20 menos que en realidad. La sustitución de una motocicleta por un automóvil hace que el número total de ruedas aumente en dos, es decir, la diferencia disminuye en dos. Es evidente que hay que hacer diez sustituciones de este tipo para que la diferencia se reduzca a cero. Por lo tanto, se repararon 10 automóviles y 30 motocicletas.

En efecto, $10 \times 4 + 30 \times 2 = 100$.

La monda de patatas

En los 25 minutos de más, la segunda persona mondó $2 \times 25 = 50$ patatas. Restando estas 50 patatas de las 400, hallamos que, trabajando el mismo tiempo, las dos mondaron 350 papatas. Como cada minuto ambas mondan en común $2 + 3 = 5$ patatas, dividiendo 350 por 5, hallamos que cada una trabajó 70 minutos.

Este es el tiempo real que trabajó la primera persona; la segunda trabajó $70 + 25 = 95$ minutos. Efectivamente, $3 \times 70 + 2 \times 95 = 400$.

El rublo tiene 100 copeikas. (*N. del Tr.*)

Los dos obreros

Si cada uno hiciera la mitad del trabajo por separado, el primero tardaría dos días más que el segundo (porque en hacer *todo* el trabajo tardaría cuatro días más). Como quiera que cuando hacen todo el trabajo juntos existe una diferencia de dos días, es evidente que, en siete días, el primero hace excatamente la mitad del trabajo; el segundo hace su mitad en cinco días. Por lo tanto, el primero podría hacer, él solo, todo el trabajo en 14 días, y el segundo, en 10 días.

La copia del discurso

La vía no estereotipada de solución de estos problemas es la siguiente. En primer lugar hay que preguntarse: ¿cómo deben repartirse el trabajo las mecanógrafas, para terminar al mismo tiempo? (Porque es evidente que sólo si se cumple esta condición es decir, si ninguna se queda sin trabajo, podrán tardar el menos tiempo posible). Como la mecanógrafa más experta escribe $1^1/_2$ veces más de prisa que la otra, está claro que la parte que haga la primera deberá ser $1^1/_2$ veces mayor que la que haga la segunda, y entonces terminarán de escribir al mismo tiempo. De esto se deduce que la primera deberá encargarse de escribir $^3/_5$ partes del discurso, y la segunda, de $^2/_5$ partes.

Con esto el problema ya está casi resuelto. Queda por saber cuánto tiempo tardará la primera mecanógrafa en hacer sus $^3/_5$ partes del trabajo. Como sabemos, todo el trabajo puede hacerlo en 2 horas; por lo tanto, las $^3/_5$ partes quedarán hechas en $2 \times {}^3/_5 =$ $= 1^1/_5$ horas. En este mismo tiempo deberá hacer su trabajo la segunda mecanógrafa.

Así, pues, el tiempo mínimo en que puede ser copiado el discurso por las dos mecanógrafas es igual a 1 hora y 12 minutos.

¿Cómo pesar la harina?

El gerente comenzó por sumar los 10 números. La suma obtenida —1156 kg— no era ni más ni menos que el peso cuadruplicado de los sacos, porque el peso de cada saco entra en esta suma cuatro veces. Dividiendo por cuatro hallamos que los cinco sacos pesan 289 kg.

Ahora, por comodidad, designaremos los sacos, en el orden de sus pesos, por números. El más liviano será el Nº 1, el segundo en peso, el Nº 2 y así sucesivamente; el más pesado será el Nº 5. No es difícil imaginarse que en la serie de números 110 kg, 112 kg, 113 kg, 114 kg, 115 kg, 116 kg, 117 kg, 118 kg, 120 kg y 121 kg, el primer número está compuesto por los pesos de los dos sacos más ligeros: el Nº 1 y el Nº 2; el segundo número por los pesos del Nº 1 y del Nº 3; el último número (121), por los de los dos sacos más pesados, es decir, por los del Nº 4 y Nº 5; y el penúltimo número, por los de los sacos Nº 3 y Nº 5. Así, pues:

El Nº 1 y el Nº 2	juntos	pesan	110 kg
el Nº 1 y el Nº 3	»	»	112 »
el Nº 3 y el Nº 5	»	»	120 »
y el Nº 4 y el Nº 5	»	»	121 ».

Por consiguiente, es fácil conocer lo que pesan en total los sacos Nº 1, Nº 2, Nº 4 y Nº 5: 110 kg + 121 kg = 231 kg. Restando esta cantidad del peso de todos los sacos (289 kg) se obtiene el peso del saco Nº 3, que es de 58 kg.

Después, de la suma de los pesos de los sacos Nº 1 y Nº 3, es decir, de 112 kg, restamos el peso del saco Nº 3, que ya conocemos; de esto resulta el peso del saco Nº 1, igual a 112 kg — 58 kg = 54 kg.

Del mismo modo hallamos lo que pesa el saco Nº 2, restando 54 kg de 110 kg, es decir, de la suma de los pesos de los sacos Nº 1 y Nº 2. Así obtenemos el peso del saco Nº 2, igual a 110 kg — 54 kg = 56 kg.

De la suma de los pesos de los sacos Nº 3 y Nº 5, es decir, de 120 kg, restamos lo que pesa el saco Nº 3, o sea, 58 kg, y encontramos que el saco Nº 5 pesa 120 kg — 58 kg = 62 kg.

Nos queda por determinar el peso del saco Nº 4, conociendo la suma de los pesos de los Nº 4 y Nº 5 (121 kg). Restando 62 de 121, hallamos que el saco Nº 4 pesa 59 kg.

Por lo tanto, los pesos de los sacos son:

54 kg, 56 kg, 58 kg, 59 kg, y 62 kg.

Hemos resuelto el problema sin recurrir a ecuaciones.

PROBLEMAS ACERCA DE COMPRAS Y PRECIOS

¿Cuánto cuestan los limones?

Tres docenas de limones cuestan tantos rublos como limones dan por 16 rublos.

¿Cuánto vale la docena de limones?

El impermeable, el sombrero y los chanclos

Un individuo compró un impermeable, un sombrero y unos chanclos por 140 rublos. El impermeable vale 90 rublos más que el sombrero, y el sombrero y el impermeable juntos cuestan 120 rublos más que los chanclos.

¿Cuánto cuesta cada cosa por separado?

Este problema debe resolverse de memoria y sin ecuaciones.

Las compras

Cuando salí de compras llevaba en el portamonedas cerca de 15 rublos sueltos y en monedas de 20 copeikas. Cuando volví traía tantos rublos sueltos como monedas de 20 copeikas llevaba cuando salí, y tantas monedas de 20 copeikas como rublos sueltos tenía antes. En total me quedó la tercera parte de la suma que cogí al salir.

¿Cuánto gasté en las compras?

Las compra de frutas

Por cinco rublos se han comprado 100 frutas distintas. Los precios de las frutas son los siguientes: las sandías a 50 copeikas cada una, las manzanas a 10 copeikas cada una y las ciruelas a 10 copeikas la decena.

¿Cuántas frutas de cada tipo se han comprado?

Encarecimiento y abaratamiento

Una mercancía encareció en un 10% y luego se abarató en un 10%.

¿Cuándo era más barata, antes de encarecerla o después de abaratarla?

Los barriles

A un almacén llevaron seis barriles de kvas[1]). La fig. 205 indica cuántos litros había en cada barril. El primer día se presentaron dos clientes: uno compró

---

[1]) Bebida refrescante rusa.

dos barriles y el otro, tres, con la particularidad de que el primero compró dos veces menos kvas que el segundo. No hubo que destapar ni un solo barril.

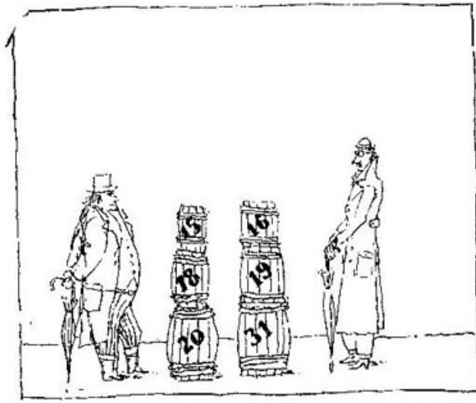


Figura 205

De los seis barriles sólo quedó uno en el almacén. ¿Cuál?

La venta de huevos

Este viejo problema popular parece, a primera vista, absurdo por completo, ya que en él se habla de la venta de medio huevo. Sin embargo, puede resolverse perfectamente.

Una campesina llegó al mercado a vender huevos. La primera clienta le compró la mitad de todos los huevos más medio huevo. La segunda clienta adquirió la mitad de los huevos que le quedaban más medio huevo. La tercera clienta sólo compró un huevo. Con esto terminó la venta, porque la campesina no tenía más huevos.

¿Cuántos huevos trajo al mercado?

El problema de Benedíktov

Muchos aficionados a la literatura rusa no sospechan que el poeta V. Benedíktov[1]) es autor del primer libro de acertijos matemáticos en lengua rusa. Este libro

[1]) Vladímir Grigórievich Benedíktov (5.11.1807-14.4.1873). (*N. del Tr.*)

no fue publicado; quedó en forma de manuscrito y no se encontró hasta el año 1924. Yo tuve ocasión de conocer este manuscrito e incluso, basándome en uno de sus acertijos, determiné el año en que fue compuesto: el de 1869 (que en dicho manuscrito no figura). El problema que proponemos a continuación, planteado por el poeta en forma literaria, está tomado de este libro. Se titula «Solución ingeniosa de un problema difícil».

«Una recovera, que disponía de nueve decenas de huevos para vender, mandó sus tres hijas al mercado y ella confió a la mayor y más lista de ellas una decena, a la segunda, tres decenas, y a la tercera medio ciento. Cuando se iban les dijo:

—Poneos de acuerdo antes sobre el precio a que los vais a vender y no hagáis rebajas; mantened todas el mismo precio; pero yo espero que mi hija mayor, como es más despierta, sabrá sacarle a su decena tanto como la segunda a sus tres, y, además, le enseñará a ésta a sacar por sus tres decenas tanto como la hermana menor por su medio ciento. Dejad que las ganancias y los precios sean iguales para las tres. Sin embargo, yo quisiera que vendierais todos los huevos de forma que redondeando resultaran a no menos de 10 copeikas la decena, y por las nueve decenas, no menos de 90 copeikas».

Aquí interrumpo la narración de Benedíktov, para dar al lector la posibilidad de acertar por su cuenta cómo cumplieron las hijas el encargo de la madre.

¿Cuánto cuestan los limones?

Sabemos que 36 limones cuestan tantos rublos como limones dan por 16 rublos. Pero 36 limones valdrán

$$36 \times (\text{el precio de uno})$$

Y por 16 rublos dan

$$\frac{16}{\text{el precio de uno}}.$$

Por lo tanto,

$$36 \times (\text{el precio de uno}) = \frac{16}{\text{el precio de uno}}.$$

Si el segundo miembro no se dividiera por el precio de uno, el primer miembro resultaría ser mayor en una cantidad dos veces igual al precio de uno, es decir, a 16:

$$36 \times (\text{el precio de uno}) \times (\text{el precio de uno}) = 16.$$

Si el primer miembro no se multiplicara por 36, el segundo miembro resultaría disminuido en 36 veces:

$$(\text{el precio de uno}) \times (\text{el precio de uno}) = {}^{16}/_{36}.$$

Está claro que el precio de un limón es igual a ${}^4/_6 = {}^2/_3$ rublos, y el precio de la docena de limones será ${}^2/_3 \times 12 = 8$ rublos.

El impermeable, el sombrero y los chanclos

Si en vez del impermeable, el sombrero y los chanclos sólo hubiera comprado dos pares de chanclos, hubiese tenido que pagar no 140 rublos, sino tantos rublos menos como los chanclos son más baratos que el impermeable y el sombero, es decir, 120 rublos menos. Por consiguiente, sabemos que dos pares de chanclos valen $140 - 120 = 20$ rublos, de donde un par costará 10 rublos.

Ahora podemos deducir que el impermeable y el sombrero juntos valen $140 - 10 = 130$ rublos. Pero el impermeable cuesta 90 rublos más que el sombrero. Volvemos a razonar como antes: en vez del impermeable y el sombrero, se compran dos sobreros. En este caso habrá que pagar no 130 rublos, sino 90 rublos menos. Por lo tanto, dos sombreros valen $130 - 90 = 40$ rublos, de donde el precio de un sombrero será 20 rublos.

Así, pues, los precios de las prendas compradas son: el de los chanclos 10 rublos, el del sombrero, 20 rublos; y el del impermeable, 110 rublos.

Las compras

Llamemos x al número inicial de rublos sueltos e y al número de monedas de 20 copeikas. Entonces, cuando salí de compras llevaba en el portamonedas

$$(100x + 20y) \text{ copeikas.}$$

Cuando volví tenía

$$(100y + 20x) \text{ copeikas.}$$

Sabemos que la última suma es tres veces menor que la primera; por lo tanto

$$3\,(100y + 20x) = 100x + 20y.$$

Simplificando esta expresión, obtenemos:

$$x = 7y.$$

Si $y = 1$, $x = 7$. Partiendo de esta suposición, yo tenía al principio 7 rublos y 20 copeikas; esto no está de acuerdo con la condición del problema («cerca de 15 rublos»).

Hagamos $y = 2$; entonces $x = 14$. En este caso la suma inicial sería igual a 14 rublos y 40 copeikas, lo que concuerda bien con la condición antedicha.

Si se supone $y = 3$, resulta una suma demasiado grande: 21 rublos y 60 copeikas.

Por consiguiente, la única respuesta adecuada es 14 rublos y 40 copeikas. Después de las compras quedaron 2 rublos sueltos y 14 monedas de 20 copeikas, es decir, $200 + 280 = 480$ copeikas; lo que compone, efectivamente, la tercera parte de la suma inicial $(1440 : 3 = 480)$.

Se gastaron $1440 - 480 = 960$ copeikas, es decir, el precio de las compras es 9 rublos y 60 copeikas.

La compra de frutas

A pesar de la aparente indeterminación, el problema sólo tiene una solución. Es esta:

		Cantidad	*Precio*
Sandías		1	50 copeikas
Manzanas		39	3 rublos y 90 copeikas
Ciruelas		60	60 copeikas
	Total	100	5 rublos y 00 copeikas

Encarecimiento y abaratamiento

Es un error considerar que el precio será el mismo en ambos casos. Hagamos los cálculos correspondientes. Después de encarecer, la mercancía costaba el 110%, o sea, el 1,1 del precio inicial. Después de abaratarla, su precio constituía el

$$1{,}1 \times 0{,}9 = 0{,}99,$$

es decir, el 99% del inicial. Por consiguiente, después de la rebaja, la mercancía resultó un 1 % más barata que antes de la subida del precio.

Los barriles

El primer cliente compró un barril de 15 litros y otro de 18. El segundo, uno de 16 litros, otro de 19 y otro de 31.

En efecto,

$$15 + 18 = 33.$$
$$16 + 19 + 31 = 66,$$

es decir, el segundo cliente compró dos veces más kvas que el primero.

Quedó por vender el barril de 20 litros.

Esta es la única respuesta posible. Otras combinaciones no dan la correlación que se requiere.

La venta de huevos

El problema se resuelve partiendo del final. Después de que la segunda clienta adquirió la mitad de los huevos que quedaban más medio huevo, a la campesina sólo le quedó un huevo. Es decir, $1^1/_2$ huevos constituyen la segunda mitad de lo que quedó después de la primera venta. Está claro que el resto completo eran tres huevos. Añadiendo $^1/_2$ huevo, obtenemos la mitad de los que tenía la campesina al principio. Así, pues, el número de huevos que trajo al mercado era siete.

Hagamos la comprobación:

$$7:2=3\frac{1}{2};\quad 3\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=4;\quad 7-4=3$$

$$3:2=1\frac{1}{2};\quad 1\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=2;\quad 3-2=1,$$

lo que está en pleno acuerdo con la condición del problema.

El problema de Benedíktov

Reproducimos la terminación de la narración, que interrumpimos, de Benedíktov.

«El problema era difícil. Las hijas, mientras iban al mercado, empezaron a cambiar impresiones, pero la segunda y tercera recurrían al talento y consejo de la mayor. Esta, después de pensar, dijo:

—Hermanas, vamos a vender los huevos no por decenas, como es costumbre hasta ahora, sino por septenas: siete huevos son una septena. A cada septena le ponemos un precio que mantendremos firmemente, como ha dicho la madre. Al precio fijado no se le rebaja ni una copeika, ¿entendido? Por la primera septema pediremos un altín[1]), ¿de acuerdo?

—Demasiado barato —dijo la segunda.

—Pero en cambio —replicó la mayor—, elevaremos el precio en los huevos que nos queden en los cestos después de vender las septenas completas. Yo ya he visto que en el mercado, además de nosotras, nadie vende huevos. No hay quien compita con nosotras. Cuando hay demanda y las mercancías se acaban, el precio de las que quedan sube. Por eso, nosotras nos resarciremos en los huevos que queden.

—¿Y a cuánto vamos a vender los restantes? —preguntó la más joven.

—A 3 altines cada huevo. Si quieren, bien, y si no, nada. A quien le hagan mucha falta, los pagará.

—Eso es caro —advirtió otra vez la de en medio.

—¿Y qué? —prosiguió la mayor—, ¿no vendemos acaso, baratos los primeros huevos por septenas? Lo uno compensa lo otro.

Quedaron de acuerdo.

Llegaron al mercado. Cada una de las hermanas se sentó en su sitio, separada de las otras, y se puso a vender. El público, atraído por la baratura, se agolpó junto a la her-

[1]) Moneda, ya en desuso, que valía 3 copeikas.

mana menor, que tenía medio ciento de huevos, y le compró todos. A cada uno de los siete primeros clientes le vendió una septena, cobró 7 altines y le quedó en el cesto un huevo. La segunda hermana que tenía tres decenas, las vendió a cuatro compradoras, una septena a cada una, y le quedaron dos huevos en el cesto: cobró 4 altines. A la hermana mayor le compraron una septena, por 1 altín, y le quedaron tres huevos.

De improviso se presentó una cocinera, a quien su señora mandó para que comprara no menos de una decena de huevos, al precio que fuera. Acababan de llegar, para pasar un poco de tiempo con su madre, los hijos de la señora, que se pirraban por los huevos fritos. La cocinera corrió de una parte a otra por el mercado. Ya habían vendido todos los huevos. Solamente a tres recoveras les quedaban seis huevos en total: uno a una, dos a otra, y tres a la tercera.

La cocinera, como es natural, se acerca primero a la que tenía tres huevos (que era la hermana mayor, que había vendido su única septena por un altín) y le pregunta:

—¿Cuánto quieres por los tres huevos?

Y ella le responde:

—3 altines por cada uno.

—¡Qué dices!, ¿te has vuelto loca? —exclama la cocinera.

—Como quiera —le replica la otra—, más baratos no los doy. Son los últimos.

La cocinera se dirige a la que tenía dos huevos en el cesto.

—¿A cómo los vende?

—A 3 altines cada uno. Ese es el precio establecido. Se han vendido todos.

—Y este huevo, ¿cuánto vale? —le pregunta la cocinera a la hermana menor.

Y ésta le contesta:

—3 altines.

¿Que hacer? Tuvo que comprar los huevos a aquel precio exorbitante.

—Vengan acá todos los huevos que quedan.

Y la cocinera dio a la hermana mayor 9 altines por sus tres huevos, que con el altín que ya tenía formaron 10; a la segunda le pagó 6 altines por el par de huevos, que con los 4 que había cobrado antes por las cuatro septenas sumaron también 10 altines. La hermana menor recibió de la cocinera 3 altines por su único huevo, y juntándolos a los 7 que antes le reportó la venta de las 7 septenas, vio que, lo mismo que sus hermanas, tenía 10 altines.

Luego las hermanas regresaron a su casa, cada una le dio a la madre 10 altines y le contaron cómo habían vendido los huevos y cómo, manteniendo una condición común con respecto al precio, habían logrado cobrar lo mismo por una decena que por medio ciento.

La madre quedó muy satisfecha de que sus hijas hubieran cumplido su encargo al pie de la letra y de la ingeniosidad de la mayor, que les había aconsejado lo que tenían que hacer para cumplirlo; y aún fue mayor su alegría por el hecho de que el dinero recaudado por sus tres hijas —30 altines, o 90 copeikas— fuera el que ella quería».

* * *

Al lector quizá le interese conocer en qué consiste el manuscrito no publicado de V. Benedíktov, del que hemos copiado el problema anterior. La obra de Benedíktov carece de título, pero de su carácter y destino se habla con detenimiento en el prólogo del libro.

«El cálculo aritmético puede aplicarse a diversos pasatiempos, juegos, bromas, etc. Muchos de los llamados *trucos* (subrayado en el original. —*Ya. P.*) se basan en cálculos numéricos, realizados a veces por medio de naipes, en los que se toma en consideración el número de los propios naipes o el número de puntos que se adjudican a unos u otros o ambas cosas a la vez. Algunos problemas, en cuya resolución deben figurar los números más enormes, representan hechos curiosos y dan una idea de estos números que superan todo lo imaginable. Nosotros los incluimos en esta parte adicional de la aritmética. Algunos problemas requieren para su resolución una inteligencia extraordinariamente despierta y pueden resolverse aunque a primera vista parezcan completamente absurdos y contradictorios del sentido común, por ejemplo, el que insertamos aquí bajo el título: «Venta ingeniosa de huevos». La parte práctica, aplicada, de la aritmética requiere a veces no sólo saber las reglas teóricas que se exponen en la aritmética pura, sino también agudeza, que se adquiere por medio del desarrollo mental que reporta el conocimiento de las diversas facetas de las cosas serias y de simples entretenimientos, que por esto hemos creído conveniente que tengan aquí su puesto».

El libro de Benedíktov está dividido en 20 capítulos cortos, no numerados, pero sí titulados cada uno. Los primeros capítulos llevan los títulos siguientes: «Los llamados cuadrados mágicos», «Adivinación de un número pensado desde 1 hasta 30», «Adivinación de sumas distribuidas en secreto», «La cifra pensada en secreto, se descubre por sí sola», «Conocimiento de una cifra tachada», etc. Sigue a continuación una serie de trucos con naipes, de carácter aritmético. Después de ellos va un capítulo curioso: «El caudillo hechicero y el ejército aritmético», donde la multiplicación con los dedos se presenta en forma de anécdota; luego se encuentra el problema que reproducimos antes, acerca de la venta de huevos. El penúltimo capítulo —«La falta de granos de trigo para llenar las 64 casillas del tablero de ajedrez»— cuenta la conocida leyenda antigua sobre la invención del juego del ajedrez.

Finalmente, el capítulo 20, «El número enorme de los habitantes que han vivido en la Tierra», contiene un intento interesante de calcular el número total de la población de la Tierra desde que existe la humanidad (un análisis detallado del cálculo de Benedíktov fue hecho por mí en el libro «Algebra recreativa»).

EL PESO Y LA PESADA

Un millón de objetos

Un objeto pesa 89,4 g. Calcule mentalmente cuántas toneladas pesará un millón de estos objetos.

La miel y el keroseno

Un tarro de miel pesa 500 g. Este mismo tarro lleno de keroseno pesa 350 g. El keroseno es dos veces más ligero que la miel.

¿Cuánto pesa el tarro?

El peso del tronco

Un tronco redondo pesa 30 kg.

¿Cuánto pesaría si fuera el doble de grueso y la mitad de largo?

Debajo del agua

En una balanza ordinaria hay: en un platillo, un canto que pesa 2 kg exactos, y en el otro, una pesa de hierro de 2 kg. Yo sumergí con precaución este peso en agua.

¿Siguen los platillos en equilibrio?

La balanza decimal

100 kg de clavos de hierro se equilibran en una balanza decimal, con pesas también de hierro, y la balanza se hunde en agua.

¿Se conserva el equilibrio debajo del agua?

Un trozo de jabón

En un platillo de una balanza se ha puesto un trozo de jabón, en el otro, $^3/_4$ partes de un trozo de jabón igual, y, además, una pesa de $^3/_4$ de kg. La balanza está en equilibrio.

¿Cuánto pesa el trozo entero de jabón?

Este problema no es difícil. Procure resolverlo mentalmente, sin recurrir al lápiz y al papel.

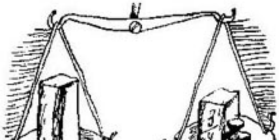


Figura 206

Las gatas y los gatitos

Por la fig. 207 puede ver que cuatro gatas y tres gatitos pesan 15 kg, y tres gatas y cuatro gatitos pesan 13 kg.

222-223

¿Cuánto pesa cada gata y cada gatito, por separado?

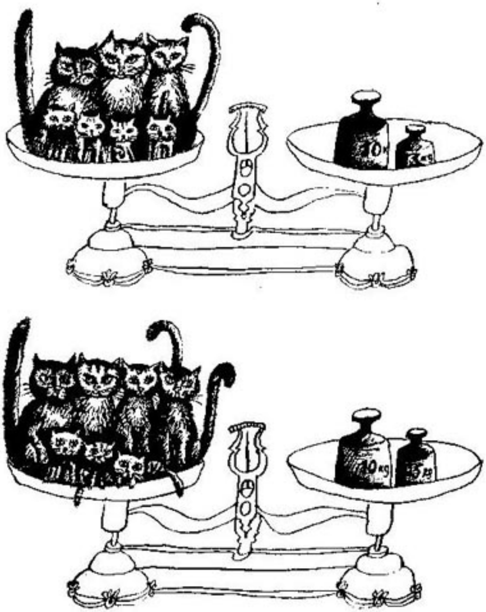


Figura 207

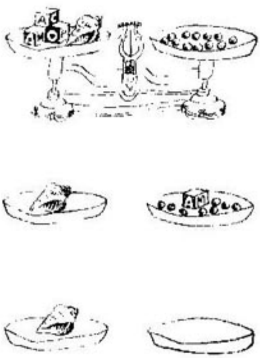


Figura 208

Se supone que todas las gatas pesan lo mismo y que los gatitos también son iguales.

Procure resolver este problema mentalmente.

Las conchas y las cuentas de vidrio

La fig. 208 representa cómo tres cubos de un rompecabezas infantil y una concha se equilibran con 12 cuentas de vidrio y que, después, la concha sola se equilibra con un cubo y ocho cuentas.

¿Cuántas cuentas de vidrio habrá que poner en el platillo libre de la balanza, para equilibrar la concha que está en el otro platillo?

El peso de las frutas

Este es un problema del mismo tipo que el anterior. La fig. 209 muestra que tres manzanas y una pera

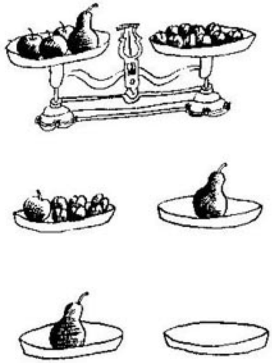


Figura 209

pesan lo mismo que 10 melocotones, y seis melocotones y una manzana pesan lo mismo que una pera.

¿Cuántos melocotones serán necesarios para equilibrar la pera?

¿Cuántos vasos?

En la fig. 210 puede ver que una botella y un vaso se equilibran con una jarra; la propia botella se equilibra con el vaso y un plato pequeño; y dos jarras se equilibran con tres platos iguales que el anterior.

¿Cuántos vasos hay que poner en el platillo libre de la balanza, para equilibrar la botella?

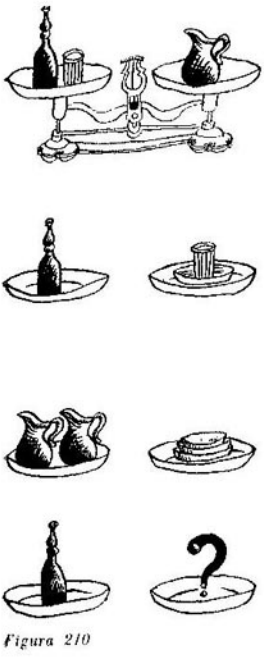


Figura 210

Con una pesa y un martillo

Hay que distribuir 2 kg de azúcar molida en paquetes de 200 gramos. Sólo se dispone de una pesa de 500 gramos y de un martillo, que pesa 900 g.

¿Cómo conseguir los 10 paquetes de 200 g, utilizando únicamente esta pesa y el martillo?

El problema de Arquímedes

El más antiguo de los acertijos relativos a pesadas es, sin duda, el que Hierón II, antiguo tirano de Siracusa, le planteó al célebre matemático Arquímedes.

Dice la tradición que Hierón II encargó a un maestro orfebre que hiciera una corona para una estatua y ordenó que le entregasen la cantidad necesaria de oro y plata. Cuando le entregaron la corona acabada, la

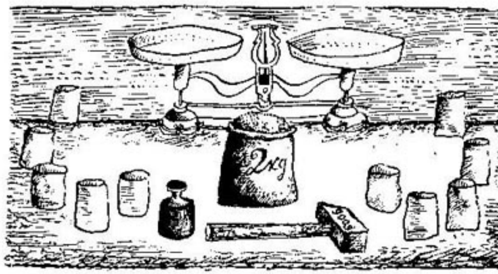


Figura 211

mandó pesar, y resultó que pesaba lo mismo que el oro y la plata juntos que había recibido el orfebre. Pero el tirano recibió una denuncia, según la cual el maestro se había quedado con parte del oro y lo había sustituido con plata. Hierón II llamó a Arquímedes y le propuso determinar las cantidades de oro y plata que había en la corona recién hecha.

Arquímedes resolvió este problema partiendo de que el oro puro pierde en el agua la vigésima parte de su peso, mientras que la plata sólo pierde la décima parte.

Si quiere usted probar sus fuerzas intentando resolver un problema análogo, suponga que al maestro orfebre le dieron 8 kg de oro y 2 kg de plata y que, cuando Arquímedes pesó la corona dentro del agua, pesó aquella no 10 kg, sino $9^1/_4$ kg. Determine con estos datos con cuánto oro se quedó el orfebre. Se supone que la corona es maciza.

SOLUCIONES

Un millón de objetos

Los cálculos de este tipo se hacen mentalmente así: hay que multiplicar 89,4 g. por un millón, es decir, por mil millares.

Multiplicamos en dos veces: $89{,}4\ \text{g} \times 1000 = 89{,}4\ \text{kg}$, porque el kilogramo es mil veces mayor que el gramo. Después, $89{,}4\ \text{kg} \times 1000 = 89{,}4\ \text{t}$, porque la tonelada es mil veces mayor que el kilogramo.

Por lo tanto, el peso buscado es 89,4 t.

La miel y el keroseno

Como la miel es dos veces más pesada que el keroseno, la diferencia de peso $500-350$, es decir, 150 g, es el peso del keroseno que cabe en el tarro (el tarro lleno de miel pesa lo mismo que pesaría si en él cupiera doble cantidad de keroseno). De aquí deducimos el peso neto del tarro: $350 - 150 = 200$ g. En efecto, $500 - 200 = 300$ g, es decir, la miel es dos veces más pesada que el mismo volumen de keroseno.

El peso del tronco

Suelen responder que si el grosor del tronco se duplica, pero su longitud se reduce a la mitad, su peso no debe variar. Pero esto es un error. Cuando el diámetro se duplica, el volumen del tronco redondo *se cuadruplica*, mientras que cuando su longitud se hace la mitad, el volumen sólo disminuye hasta la *mitad*. Por esto el tronco grueso y corto deberá ser más pesado que el largo y delgado, es decir, deberá pesar 60 kg.

Debajo del agua

Todo cuerpo, cuando se sumerge en agua, se hace más ligero: «pierde» en peso tanto como pesa el agua que desaloja. Conociendo este principio (descubierto por Arquímedes) podemos responder sin dificultad a la pregunta planteada en el problema.

El canto de 2 kg de peso ocupa un volumen mayor que la pesa de hierro de 2 kg, porque el material de aquél (granito) es más liviano que el hierro. De aquí se deduce que el canto desaloja más volumen de agua que la pesa, y, por el principio de Arquímedes, pierde dentro del agua más peso que la pesa. Así, pues, la balanza, dentro del agua, se inclinará hacia el lado de la pesa.

La balanza decimal

Cuando se sumerge en agua un objeto de hierro (macizo), éste pierde la octava parte de su peso[1]). Por esto, las pesas pesarán debajo del agua $^7/_8$ de su peso inicial, los clavos también pesarán $^7/_8$ partes de su peso en seco. Y como las pesas eran 10 veces más ligeras que los clavos, debajo del agua también serán 10 veces más livianas y, por consiguiente, la balanza decimal seguirá en equilibrio debajo del agua.

---

[1]) Esta cifra no se da en las condiciones del problema, porque, para su resolución, no tiene importancia que la propia magnitud de la pérdida sea la octava, la décima o la vigésima parte del peso.

Un trozo de jabón

$^3/_4$ partes del trozo de jabón $+ \, ^3/_4$ de kg pesan tanto como el trozo entero. Pero este trozo entero contiene $^3/_4$ partes del trozo $+ \, ^1/_4$ parte del mismo. Por consiguiente, $^1/_4$ parte del trozo pesa $^3/_4$ de kg, y el trozo entero pesa cuatro veces más que $^3/_4$ de kg, es decir, 3 kg.

Las gatas y los gatitos

Comparando ambas pesadas se ve fácilmente que, con la sustitución de una gata por un gatito, el peso total disminuye en 2 kg. De aquí se deduce que la gata pesa 2 kg más que el gatito. Conociendo esto, sustituimos en la primera pesada las cuatro gatas por gatitos: tendremos entonces $4 + 3 = 7$ gatitos, que pesarán no 15 kg, sino 2×4, o sea, 8 kg menos. Es decir, los 7 gatitos pesarán $15 - 8 = 7$ kg.

Está claro, pues, que 1 gatito pesa 1 kg y una gata, $1 + 2 = 3$ kg.

La concha y las cuentas de vidrio

Compare la primera pesada con la segunda. Verá usted que, en la primera pesada, la concha puede sustituirse por un cubo y ocho cuentas de vidrio, puesto que lo uno y lo otro pesan lo mismo. En este caso tendríamos en el platillo de la izquierda cuatro cubos y ocho cuentas, y esto estaría equilibrado por 12 cuentas. Quitando ahora ocho cuentas de cada platillo no violaremos el equilibrio. Pero en el platillo de la izquierda quedan cuatro cubos, y en el de la derecha, cuatro cuentas. Esto quiere decir que un cubo pesa lo mismo que una cuenta.

Ahora está claro cuántas cuentas de vidrio pesa la concha: sustituyendo (en la segunda pesada) un cubo por una cuenta, en el platillo de la derecha, sabemos que la concha pesa lo mismo que nueve cuentas de vidrio.

Este resultado es fácil de comprobar.

Sustituya en la primera pesada los cubos y la concha, del platillo de la izquierda, por el número correspondiente de cuentas, y obtendrá $3 + 9 = 12$, como tenía que ser.

El peso de las frutas

Sustituimos, en la primera pesada, la pera por seis melocotones y una manzana; tenemos derecho a hacer esto, porque la pera pesa tanto como seis melocotones y una manzana. Tendremos entonces en el platillo de la izquierda cuatro manzanas y seis melocotones, y en el derecho, 10 melocotones. Quitando de cada platillo seis melocotones, sabemos que cuatro manzanas pesan lo mismo que cuatro melocotones. De aquí se deduce que un melocotón pesa lo mismo que una manzana.

Ahora es ya fácil comprender que la pera pesa lo mismo que siete melocotones.

¿Cuántos vasos?

Este problema puede resolverse por diversos procedimientos. He aquí uno de ellos.

En la tercera pesada se sustituye cada jarra por una botella y un vaso (según la primera pesada, al hacer esto la balanza debe seguir en equilibrio). Sabemos entonces que dos botellas y dos vasos equilibran tres platos pequeños. Basándonos en la segunda pesada podemos sustituir cada botella por un vaso y un plato pequeño. Resulta que cuatro vasos y dos platos pequeños se equilibran con tres platos pequeños.

Quitando dos platos pequeños de cada platillo de la balanza, establecemos que cuatro vasos equilibran a un plato.

Por consiguiente, una botella se equilibra (por comparación con la segunda pesada) con cinco vasos.

Con una pesa y un martillo

El orden en que deben hacerse las pesadas es el que sigue. Primero se pone en un platillo el martillo y en el otro, la pesa y la cantidad de azúcar molida necesaria para que la balanza esté en equilibrio. Está claro que el azúcar echado en este platillo pesará $900 - 500 = 400$ g. Esta misma operación se repite tres veces más. El azúcar restante pesará $2000 - (4 \times 400) = 400$ g.

Ahora no queda más que dividir en dos partes iguales cada uno de los cinco paquetes de 400 gramos así obtenidos. Esto puede hacerse fácilmente sin pesas: se va echando el contenido del paquete de 400 gramos en dos paquetes colocados en los platillos de la balanza, hasta que ésta queda en equilibrio.

El problema de Arquímedes

Si la corona encargada estuviera hecha de oro puro, fuera del agua pesaría 10 kg, y dentro del agua perdería la vigésima parte de su peso, es decir $^1/_2$ kg. Pero, como sabemos, la corona no pierde dentro del agua $^1/_2$ kg, sino $10 - 9^1/_4 = {}^3/_4$ de kg. Esto ocurre porque la corona contiene plata —metal que sumergido en el agua pierde no la vigésima parte de su peso, sino la décima. La corona debe tener tanta plata como se necesita para perder en el agua no $^1/_2$ kg, sino $^3/_4$ de kg, es decir $^1/_4$ de kg más. Si en nuestra corona de oro puro sustituimos mentalmente 1 kg de oro por plata, la pérdida que experimenta aquélla en el agua será mayor que antes en $^1/_{10} - {}^1/_{20} = {}^1/_{20}$ kg. Por consiguiente, para que resulte la pérdida de $^1/_4$ de kg más de peso, hay que sustituir por plata tantos kilogramos de oro como veces $^1/_{20}$ de kg está contenido en $^1/_4$ de kg; pero $^1/_4 : {}^1/_{20} = 5$. Por lo tanto, la corona tenía 5 kg de plata y 5 kg de oro en vez de 2 kg de plata y 8 de oro, es decir, 3 kg de oro habían sido substraídos y sustituidos por plata.

12

La cifra seis

Pregúntele a cualquiera de sus conocidos mayores cuánto tiempo hace que tiene reloj. Supongamos que hace ya 15 años que lo tiene. Prosiga esta conversación aproximadamente así:

—¿Y cuántas veces al día mira usted su reloj?

—Unas veinte, poco más o menos —es la respuesta que sigue.

—Esto quiere decir que durante un año lo mira usted 6000 veces por lo menos, y en 15 años habrá visto su esfera unas 6000 × 15 veces, o sea, cerca de 100 mil veces. Supongo que si ha visto usted un objeto 100 mil veces lo conocerá y recordará perfectamente.

—Sin duda.

—Entonces conocerá magníficamente la esfera de su reloj y no le costará trabajo dibujar de memoria cómo está representada en ella la cifra seis.

Y ofrézcale a su interlocutor papel y lápiz.

El hará lo que usted le pide, pero... en la mayoría de los casos la cifra que dibuje no será como la representada en su reloj.

¿Por qué?

Responda a esta pregunta *sin mirar al reloj*. Muestre cómo dibujó su conocido la cifra seis y cómo la debía haber representado.

Los tres relojes

En casa hay tres relojes. El 1 de enero todos ellos indicaban la hora correctamente. Pero sólo marchaba bien el primer reloj; el segundo se atrasaba 1 minuto al día, y el tercero se adelantaba 1 minuto al día. Si los relojes continúan marchando así; ¿al cabo de cuánto tiempo volverán los tres a marcar la hora exacta?

Los dos relojes

Ayer comprobé mi reloj de pared y mi despertador y puse sus manecillas en punto. El reloj de pared se atrasa 2 minutos por hora, y el despertador se adelanta 1 minuto también por hora.

Hoy se pararon los dos relojes: se les acabó la cuerda. En la esfera del reloj de pared las manecillas marcan las 7 en punto, y en la del despertador, las 8.

¿A qué hora comprobé ayer los relojes?

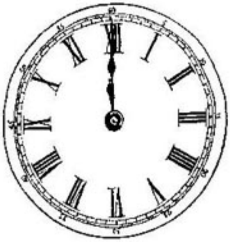


Figura 212

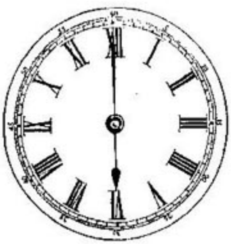


Figura 213

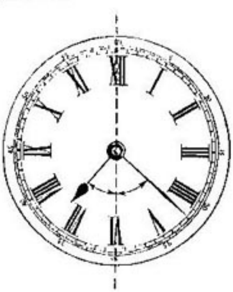


Figura 214

¿Qué hora es?

—¿A dónde va tan de prisa?
—Al tren de las seis. ¿Cuántos minutos quedan hasta su salida? —Hace 50 minutos quedaban 4 veces más minutos después de las tres. ¿Qué significa esta rara respuesta?
¿Qué hora era?

¿Cuándo se encuentran las manecillas?

A las 12 las manecillas del reloj están una sobre otra. Pero usted se habrá dado cuenta, probablemente, de que éste no es el único instante en que las manecillas se encuentran: durante el día alcanza la una a la otra varias veces.

¿Puede usted decir todos aquellos instantes en que esto ocurre?

¿Cuándo están las manecillas dirigidas en sentidos opuestos?

A las 6 sucede lo contrario que a las 12, las manecillas están dirigidas en sentidos opuestos. Pero, ¿ocurre esto sólo a las 6, o hay otros instantes en que las manecillas se sitúan también así?

A ambos lados de las seis

Yo miré el reloj y vi que sus dos manecillas estaban a ambos lados de la cifra 6 y a distancias iguales. ¿A qué hora fue esto?

¿A qué hora?

¿A qué hora adelanta el minutero al horario en la misma distancia exactamente que éste se halla por delante de la cifra 12 en la esfera? ¿Puede ocurrir esto en varios instantes durante el día, o no ocurre nunca?

Al contrario

Si ha seguido con atención la marcha de un reloj, es posible que haya observado precisamente una posición de las manecillas contraria a la que acabamos de mencionar, es decir, la posición en que el horario adelanta al minutero en tanto como este último ha pasado del número 12.

¿Cuándo ocurre esto?

Tres y siete

Un reloj da las tres. Mientras suenan las campanadas pasan 3 segundos. ¿Cuánto tiempo será necesario para que este reloj dé las siete?
Por si acaso, prevengo que no se trata de un problema de broma y que no encierra ninguna trampa.

El tictac del reloj

Finalmente, haga el pequeño experimento siguiente. Ponga su reloj sobre la mesa, aléjese de él tres o cuatro pasos y escuche su tictac. Si en la habitación reina un silencio suficiente, escuchará usted que su reloj parece que marcha con interrupciones: el tictac se oye durante cierto tiempo, luego deja de oírse varios segundos, vuelve otra vez a sonar y así sucesivamente.

¿Cómo se explica esta marcha irregular?

SOLUCIONES

La cifra seis

La mayoría de las personas no avisadas responden a esta pregunta dibujando una de las cifras 6 ó VI.

Esto demuestra que una cosa puede verse 100 mil veces y no conocerse. El secreto está en que, por lo general, en la esfera de los relojes de caballero *no figura* la cifra seis, porque en su lugar se halla el segundero.

Los tres relojes

Al cabo de 720 días. En este tiempo, el segundo reloj se atrasa 720 minutos, es decir, exactamente en 12 horas; el tercer reloj se adelanta igual tiempo. Entonces los tres relojes marcarán lo mismo que el 1° de enero, o sea, la hora exacta.

Los dos relojes

El despertador se adelanta 3 minutos por hora con respecto al reloj de pared. Se adelantará una hora, o sea, 60 minutos, al cabo de 20 horas. Pero durante estas 20 horas el despertador se habrá adelantado 20 minutos con relación a la hora exacta. Por lo tanto, las manecillas fueron puestas en punto 19 horas y 20 minutos antes, es decir, a las 11 horas 40 minutos.

¿Qué hora es?

Entre las 3 y las 6 hay 180 minutos. No es difícil comprender que el número de minutos que quedan hasta las seis se halla si $180 - 50$, es decir, 130, se divide en dos partes tales, que una de ellas sea cuatro veces mayor que la otra. Por consiguiente, hay que hallar la quinta parte de 130. Así, pues, eran las seis menos 26 minutos.

En efecto, 50 minutos antes faltaban $26 + 50 = 76$ minutos para las 6, y, por lo tanto, desde las 3 habían pasado $180 - 76 = 104$ minutos; esta cantidad de minutos es cuatro veces mayor que los minutos que faltan ahora para las seis.

¿Cuándo se encuentran las manecillas?

Comencemos a observar el movimiento de las manecillas a las 12. En este instante las dos manecillas están una sobre otra. Como el horario se mueve 12 veces más despacio que el minutero (puesto que describe una circunferencia completa en 12 horas, mientras que el minutero lo hace en 1 hora), durante la hora próxima no pueden encontrarse. Pero pasó una hora; el horario señala la cifra 1, después de recorrer $^{1}/_{12}$ parte de la circunferencia completa; el minutero ha dado una vuelta completa y se encuentra de nuevo en las 12, a $^{1}/_{12}$ parte de circunferencia del horario. Ahora las condiciones de la competición son distintas que las de antes: el horario se mueve más despacio que el minutero, pero va delante y el minutero tiene que darle alcance. Si la competición durara una hora entera, el minutero tendría tiempo de recorrer una circunferencia completa, mientras que el horario sólo recorrería $^{1}/_{12}$ parte de la circunferenica, es decir, el minutero habría recorrido $^{11}/_{12}$ de circunferencia más que aquél. Pero, para alcanzar al horario, el minutero sólo tiene que recorrer, más que aquél, la $^{1}/_{12}$ parte de circunferencia que los separa. Para esto no hace falta una hora entera, sino tantas veces menos como $^{1}/_{12}$ es menor que $^{11}/_{12}$, es decir, 11 veces menos. Esto quiere decir que las manecillas se encuentran al cabo de $^{1}/_{11}$ de hora, o sea, al cabo de $^{60}/_{11} = 5^{5}/_{11}$ de minuto.

Así, pues, el encuentro de las manecillas ocurre $5^{5}/_{11}$ de minuto después de pasar una hora, es decir, a la 1 y $5^{5}/_{11}$ de minuto.

¿Cuándo se produce el encuentro siguiente?

No es difícil darse cuenta de que esto ocurrirá al cabo de 1 hora y $5^{5}/_{11}$ de minuto, es decir, a las 2 y $10^{10}/_{11}$ de minuto. El otro, 1 hora y $5^{5}/_{11}$ de minutos después, o sea, a las 3 y $16^{4}/_{11}$ de minuto, y así sucesivamente. En total habrá 11 encuentros; el undécimo llegará al cabo de $1^{1}/_{11} \times 11 = 12$ horas de producirse el primero, es decir, a las 12; en otras palabras, coincidirá con el primer encuentro, y, en adelante, los encuentros se repiten en los mismos instantes que antes.

He aquí los instantes en que las manecillas se encuentran:

1er	encuentro	a la	1	y	$5\frac{5}{11}$	de	minuto
2º	»	a las	2	»	$10\frac{10}{11}$	»	»
3er	»	» »	3	»	$16\frac{4}{11}$	»	»
4º	»	» »	4	»	$21\frac{9}{11}$	»	»
5º	»	» »	5	»	$27\frac{3}{11}$	»	»
6º	»	» »	6	»	$32\frac{8}{11}$	»	»
7º	»	» »	7	»	$38\frac{2}{11}$	»	»
8º	»	» »	8	»	$43\frac{7}{11}$	»	»
9º	»	» »	9	»	$49\frac{1}{11}$	»	»
10º	»	» »	10	»	$53\frac{6}{11}$	»	»
11º	»	» »	12.				

¿Cuándo están las manecillas dirigidas en sentidos opuestos?

Este problema se resuelve de un modo muy parecido al anterior. Empecemos otra vez en las 12, cuando las dos manecillas coinciden. Hay que calcular cuánto tiempo será necesario para que el minutero adelante al horario en media circunferencia exactamente; en este caso las manecillas estarán dirigidas precisamente en sentidos opuestos. Ya sabemos (véase el problema precedente) que en una hora entera el minutero adelanta al horario en $^{11}/_{12}$ de circunferencia completa; para adelantarlo solamente en $^{1}/_{2}$ de circunferencia necesitará menos de una hora—tantas veces menos como $^{1}/_{2}$ es menor que $^{11}/_{12}$, es decir, necesitará nada más que $^{6}/_{11}$ de hora. Esto quiere decir que, después de las 12, las manecillas estarán por primera vez dirigidas en sentidos opuestos al cabo de $^{6}/_{11}$ de hora, o sea, de $32^{8}/_{11}$ de minuto. Mire el reloj a las 12 y $32^{8}/_{11}$ de minuto y verá que las manecillas tienen sentidos opuestos.

¿Es éste el único instante en que las manecillas se sitúan así? Está claro que no. Las manecillas ocupan posiciones semejantes a ésta $32^8/_{11}$ de *minuto después de cada encuentro*. Pero ya sabemos que durante 12 horas las manecillas se encuentran 11 veces; por lo tanto, también se situarán en sentidos opuestos 11 veces en 12 horas. Hallar estos instantes no es difícil:

$$\text{Las } 12+32\frac{8}{11} \text{ de min} = \text{las } 12 \text{ y } 32\frac{8}{11} \text{ de min,}$$

$$\text{la } 1 \text{ y } 5\frac{5}{11} \text{ de min} + 32\frac{8}{11} \text{ de min} = \text{la } 1 \text{ y } 38\frac{2}{11} \text{ de min,}$$

$$\text{las } 2 \text{ y } 10\frac{10}{11} \text{ de min} + 32\frac{8}{11} \text{ de min} = \text{las } 2 \text{ y } 43\frac{7}{11} \text{ de min,}$$

$$\text{las } 3 \text{ y } 16\frac{4}{11} \text{ de min} + 32\frac{8}{11} \text{ de min} =$$

$$= \text{las } 3 \text{ y } 49\frac{1}{11} \text{ de min, etc.}$$

Doy a usted la posibilidad de que calcule los demás instantes.

A ambos lados de las seis

Este problema se resuelve lo mismo que el anterior. Supongamos que las dos manecillas estaban en las 12 y que, después, el horario se separó de las 12 en una parte determinada de vuelta completa que llamaremos x. Durante este intervalo, el minutero habrá tenido tiempo de girar en $12 \cdot x$. Si el tiempo transcurrido no es mayor que una hora, para satisfacer la condición de nuestro problema es preciso que el minutero diste del fin de una circunferencia completa tanto como el horario haya tenido tiempo de separarse de su principio; en otras palabras:

$$1 - 12 \cdot x = x.$$

De aquí se deduce que $1 = 13 \cdot x$ (porque $13 \cdot x - 12 \cdot x = x$). Por lo tanto, $x = {}^1/_{13}$ parte de la vuelta completa. Esta fracción de vuelta la recorre el horario en ${}^{12}/_{13}$ de hora, es decir, cuando marca las 12 y $55^5/_{13}$ de min. Durante este tiempo, el minutero habrá recorrido 12 veces más, es decir, ${}^{12}/_{13}$ de vuelta completa; como ve, las dos manecillas están a la misma distancia de las 12 y, por consiguiente, lo mismo de separadas de las 6 por ambos lados.

Hemos hallado una de las posiciones de las manecillas, la que se produce durante la *primera* hora. Durante la *segunda* hora vuelve a presentarse en posición semejante; la encontramos, razonando como en el caso precedente, por medio de la igualdad

$$1 - (12x - 1) = x, \quad \text{ó} \quad 2 - 12x = x,$$

de donde $2 = 13x$ (porque $13x - 12x = x$) y, por consiguiente, $x = {}^2/_{13}$ de vuelta completa. Las manecillas ocuparán esta posición a la 1 y ${}^{11}/_{13}$ de hora, o sea, a la 1 y $50^{10}/_{13}$ de min.

Por tercera vez, las manecillas se hallarán en la posición conveniente cuando el horario se aparte de las 12 en ${}^3/_{13}$ de circunferencia completa, es decir, a las 2 y ${}^{10}/_{13}$ de hora, y así sucesivamente. En total habrá 11 posiciones, con la particularidad de que después de las seis las manecillas cambiarán entre sí sus puestos: el horario ocupará los puntos en que estuvo antes el minutero y éste, los que ocupó antes el horario.

¿A qué hora?

Si se comienzan a observar las manecillas a las 12 en punto, durante la primera hora no se nota la disposición buscada. ¿Por qué? Porque el horario recorre $^1/_{12}$ parte de lo que recorre el minutero y, por lo tanto, queda retrasado con respecto a él mucho más de lo necesario para la disposición que se busca. Cualquiera que sea el ángulo a que se aparte de las 12 el minutero, el horario girará $^1/_{12}$ parte de este ángulo, y no $^1/_2$, como se requiere. Pero pasó una hora; ahora el minutero está en las 12 y el horario, en la 1, es decir, $^1/_{12}$ partes de vuelta delante del minutero. Veamos si esta disposición de las manecillas puede producirse durante la segunda hora. Supongamos que este instante se produjo cuando el horario se apartó de las 12 en una fracción de vuelta que llamaremos x. Durante este tiempo el minutero habrá recorrido un espacio 12 veces mayor, es decir, $12x$. Si de aquí se resta una vuelta completa, el resto $12x - 1$ deberá ser el doble que x, o sea, ser igual a $2x$. Vemos, por consiguiente, que $12x - 1 = 2x$, de donde se deduce que una vuelta completa es igual a $10x$ (en efecto, $12x - 10x = 2x$). Pero si $10x$ es igual a una vuelta completa, $1x = {}^1/_{10}$ parte de vuelta. Y ésta es la solución del problema: el horario se separó de la cifra 12 en $^1/_{10}$ parte de vuelta completa, para lo que se requieren $^{12}/_{10}$ partes de hora o una hora y 12 minutos. Al ocurrir esto, el minutero se encontrará a doble distancia de las 12, es decir, a la distancia de $^1/_5$ parte de vuelta, lo que responde a $^{60}/_5 = 12$ minutos, como debía ser.

Hemos encontrado una solución del problema. Pero tiene otras: durante las 12 horas, las manecillas se encuentran en posiciones semejantes no una vez, sino varias. Intentaremos hallar las demás soluciones.

Para esto esperaremos a que sean las 2; el minutero estará entonces en las 12 y el horario en las 2. Razonando como antes, obtenemos la igualdad:

$$12x - 2 = 2x,$$

de donde dos vueltas completas son iguales a $10x$ y, por lo tanto, $x = {}^1/_5$ parte de vuelta entera. Esto corresponde al instante $^{12}/_5 = 2$ horas y 24 minutos.

Los demás instantes puede usted calcularlos ya fácilmente. Entonces sabrá que las manecillas se sitúan de acuerdo con la condición del problema en los 10 instantes siguientes:

a la 1 y 12 min	a las 7 y 12 min
a las 2 y 24 »	a » 8 y 24 »
a » 3 y 36 »	a » 9 y 36 »
a » 4 y 48 »	a » 10 y 48 »
a » 6	a » 12.

Las respuestas: «a las 6» y a las «12» pueden parecer erróneas, pero sólo a primera vista. En efecto: a las 6, el horario está en las 6 y el minutero en las 12, es decir, exactamente el doble de lejos. A las 12, el horario se halla a la distancia «cero» de las 12, y el minutero, si lo desea, a «dos ceros» de distancia (porque cero doble es lo mismo que cero); por consiguiente, también este caso satisface, en esencia, la condición del problema.

Al contrario

Después de las explicaciones precedentes, ya no es difícil resolver este problema. Es fácil comprender, razonando como antes que la disposición que se requiere de las manecillas se dará por primera vez en el instante definido por la igualdad:

$$12x-1=\frac{x}{2},$$

de donde $1 = 11^{1}/_{2}x$, ó $x = {}^{2}/_{23}$ partes de una vuelta completa, o sea, al cabo de $1^{1}/_{23}$ horas, después de las 12. Es decir, a la 1 y $21^{4}/_{23}$ de minuto estarán las manecillas dispuestas como se requiere. Efectivamente, el minutero debe estar en el punto medio entre las 12 y la $1^{1}/_{23}$, o sea, en las ${}^{12}/_{23}$ de hora, lo que constituye precisamente ${}^{1}/_{23}$ de vuelta completa (y el horario recorrerá ${}^{2}/_{23}$ de vuelta completa).

Por segunda vez, las manecillas se situarán como es debido en el instante definido por la igualdad:

$$12x-2=\frac{x}{2},$$

de donde $2 = 11^{1}/_{2}x$, y $x = {}^{4}/_{23}$; el instante buscado será, pues, el de las 2 y $5^{5}/_{23}$ de minuto.

El tercer instante, las 3 y $7^{19}/_{23}$ de minuto, etc.

Tres y siete

Generalmente responden: «7 segundos». Pero, como ahora veremos, esta respuesta es falsa.

Cuando el reloj da las tres, notamos dos intervalos:

1) entre la primera y la segunda campanada;

2) entre la segunda y la tercera campanada.

Ambos intervalos duran 3 segundos; es decir, cada uno de ellos dura la mitad, o sea, $1^{1}/_{2}$ segundos.

En cambio, cuando el reloj da las siete, el número de estos intervalos es seis. Y seis veces por $1^{1}/_{2}$ segundos son 9 segundos. Por consiguiente, el reloj «da las siete» (es decir, da siete campanadas) en 9 segundos.

El tictac del reloj

Los intervalos incomprensibles en el tictac del reloj se deben simplemente al cansancio del oído. Nuestro oído, cuando se cansa, se debilita durante unos segundos, y en estos intervalos no oímos el tictac. Al cabo de un corto espacio de tiempo pasa el cansancio y se recupera la agudeza inicial, con lo que volvemos a escuchar la marcha del reloj. Luego se produce otra vez el cansancio y así sucesivamente.

236-237

PROBLEMAS ACERCA DE LOS MEDIOS DE TRANSPORTE

El vuelo

Un avión recorre la distancia que hay desde la ciudad A hasta la ciudad B en 1 hora y 20 minutos. Pero el vuelo de retorno lo efectúa en 80 minutos.

¿Cómo explica usted esto?

Las dos locomotoras

Sin duda, usted habrá tenido ocasión de ver cómo dos locomotoras llevan un tren: una de ellas va delante, y la otra, detrás. Pero, ¿ha pensado lo que ocurre, en este caso, con los enganches de los vagones y con sus topes? La locomotora que va delante sólo tira de los vagones cuando sus enganches están tensos; pero entonces los topes no están en contacto y la locomotora que va detrás no puede empujar a los vagones. Y al contrario, cuando la locomotora trasera le empuja al tren, unos topes ejercen presión sobre los otros, pero los enganches no están en tensión y, por lo tanto, el trabajo que realiza la locomotora delantera es inútil.

Resulta, pues, que ambas locomotoras no pueden mover el tren simultáneamente: eficazmente trabaja bien una locomotora o bien la otra.

¿Por qué, entonces, enganchan dos locomotoras?

La velocidad del tren

Usted va en un vagón de ferrocarril y quiere saber qué velocidad lleva el tren.

¿Puede usted determinarla por el golpeteo de las ruedas?

Los dos trenes

Dos trenes salieron al mismo tiempo de dos estaciones, el uno al encuentro del otro. El primero llegó a la estación de destino una hora después de cruzarse con el segundo, y éste, 2 horas y 15 minutos después del encuentro.

¿Cuántas veces es mayor la velocidad de un tren que la del otro?

Este problema puede resolverse mentalmente.

Problemas acerca de los medios de transporte

¿Cómo arranca el tren?

Usted quizá se haya dado cuenta de que antes que el tren empiece a andar hacia adelante, el maquinista deja con frecuencia que retroceda un poco.

¿Para qué hace esto?

La regata

Dos balandros participan en una regata, en la que deben recorrer 24 km de ida y vuelta en el tiempo más corto posible. El primer balandro recorrió todo el camino con la velocidad uniforme de 20 km por hora; el segundo fue *hacia allá* con una velocidad de 16 km por hora, y *retornó* con la de 24 km por hora.

Venció en las regatas el primer balandro, aunque, al parecer, el segundo debía rezagarse del primero en una dirección, el mismo espacio exactamente que lo adelantaría en el camino de vuelta, y, por consiguiente, debería llegar al mismo tiempo que el primero.

¿Por qué llegó más tarde?

Desde Ensk hasta Equisgrado

Navegando a favor de la corriente, un vapor desarrolla 20 km por hora; navegando en contra, sólo 15 km por hora. En ir desde el embarcadero de la ciudad de Ensk hasta el embarcadero de Equisgrado, tarda 5 horas menos que en el viaje de regreso.

¿Qué distancia hay entre estas dos ciudades?

El vuelo

En este problema no hay nada que explicar, porque el avión hace el recorrido en los dos sentidos en el mismo tiempo, ya que 80 minutos = 1 hora y 20 minutos.

El problema está previsto para el lector distraído, que puede pensar que entre 1 hora 20 minutos y 80 minutos hay diferencia. Aunque parezca extraño hay quien pica en este anzuelo, con la particularidad de que entre ellos son más los que están acostumbrados a hacer cálculos que los que tienen poca experiencia. Esto se debe a la costumbre de utilizar el sistema métrico decimal y las unidades monetarias decimales. Al ver escrito: «1 hora y 20 minutos» y al lado «80 minutos», inconscientemente nos figuramos la diferencia entre estas cantidades como la que hay entre 1 rublo y 20 copeikas y 80 copeikas. En este error psicológico se basa el problema.

Las dos locomotoras

Este problema acertijo se resuelve sencillísimamente. La locomotora delantera no tira de todo el tren, sino sólo de, aproximadamente, la mitad de los vagones. Los demás vagones son empujados por la locomotora trasera. En la primera parte del tren, los enganches de los vagones están tensos, en el resto, sin tensar, y los topes de los vagones se apoyan unos en otros.

La velocidad del tren

Como es natural, usted habrá notado que, cuando se viaja en un vagón de ferrocarril, se siente continuamente un traqueteo acompasado; no hay ballestas capaces de hacerlo inapreciable. Este traqueteo se debe a que, en los puntos de unión de los raíles (fig. 215), las ruedas experimentan sacudidas que se propagan a todo el vagón.

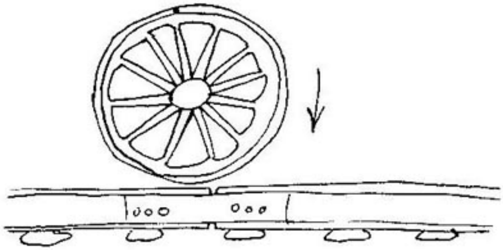


Figura 215

Estas sacudidas desagradables, que causan considerables deterioros tanto en los vagones como en las vías, pueden utilizarse para calcular la velocidad del tren. Para esto no hay más que contar cuántas sacudidas por minuto experimenta el vagón, con lo que se sabe cuántos raíles recorrió el tren. Después se multiplica este número por la longitud de cada raíl, y se obtiene la distancia recorrida por el tren en un minuto.

La longitud ordinaria de un raíl es de cerca de 15 m[1]). Una vez contado, reloj en

[1]) Cuando salga del vagón en alguna estación, puede medir la longitud de un raíl contando los pasos que tiene. Siete pasos equivalen, aproximadamente, a 5 m.

mano, el número de sacudidas por minuto, multiplíquelo por 15 y después por 60 y luego divídalo por 1000, con lo que obtendrá el número de kilómetros que recorre el tren en una hora:

$$\frac{(\text{el número de sacudidas})\times 15\times 60}{1000}=\text{el número de km por h.}$$

Los dos trenes

El tren más rápido recorrió hasta el punto de encuentro (en que se cruzó con el otro tren) un camino tantas veces más largo que el recorrido por el más lento, como veces mayor es la velocidad del primero que la del segundo. Después del encuentro, al tren más rápido le quedaba por recorrer, hasta la estación, el camino que había recorrido el más lento hasta dicho encuentro, y viceversa. En otras palabras, el tren rápido recorrió después del encuentro un camino tantas veces más corto como veces mayor es su velocidad. Si designamos por x la relación entre las velocidades, el tren rápido tardó en recorrer la parte de camino comprendida entre el punto de encuentro y la estación de destino x^2 menos tiempo que el lento. De aquí de deduce que $x^2 = 2^1/_4$ y $x = 1^1/_2$, es decir, la velocidad de un tren es vez y media mayor que la del otro.

¿Cómo arranca el tren?

Cuando el tren llega a la estación y se para, los enganches de los vagones quedan tensos. Si la locomotora empieza a tirar del tren en estas condiciones, tiene que hacer que todos los vagones arranquen *a la vez*; cuando el tren es muy pesado la máquina no tiene suficiente fuerza para esto. Pero en cambio, si la locomotora hace previamente que el tren retroceda, los enganches no estarán tensos y los vagones se irán poniendo en movimiento *sucesivamente*, uno después de otro, con lo que el arranque resulta más fácil.

Concretamente, el maquinista hace lo mismo que el carrero de un carro muy cargado, que sólo se monta cuando éste ya está en marcha, porque de lo contrario el caballo tendría que mover del sitio de un tirón un peso demasiado grande.

La regata

El segundo balandro llegó más tarde porque navegó *menos tiempo* a 24 km por hora que a 16 km por hora.

En efecto, a 24 km por hora navegó $^{24}/_{24}$, es decir, 1 hora, mientras que a 16 km por hora, $^{24}/_{16}$, o sea, $1^1/_2$ hora. Por esto en el camino de *ida* perdió más tiempo que el que ganó en el de vuelta.

Desde Ensk hasta Equisgrado

Navegando a favor de la corriente, el vapor recorre 1 km en 3 minutos; cuando navega contra la corriente, 1 km en 4 minutos. En el primer caso, el vapor gana 1 minuto en cada kilómetro, y como en todo el recorrido gana 5 horas de tiempo, o 300 minutos, se deduce que desde Ensk hasta Equisgrado hay 300 km.

Efectivamente:

$$\frac{300}{15}-\frac{300}{20}=20-15=5.$$

El vaso de guisantes

Usted habrá visto más de una vez guisantes y habrá tenido en sus manos vasos con mucha frecuencia. Por lo tanto, conocerá bien las dimensiones de unos y otros. Pues, figúrese un vaso lleno hasta arriba de guisantes secos y que estos guisantes se ensartan como cuentas en un hilo.

Si este hilo, con los guisantes, se extiende, ¿qué longitud tendrá?

El agua y el vino

En una botella hay un litro de vino, y en otra, un litro de agua. De la primera a la segunda se transvasa una cucharada de vino y, después, de la segunda a la primera se transvasa una cucharada de la mezcla obtenida.

¿Qué hay ahora más, agua en la primera botella o vino en la segunda?

El dado

Figura 216

He aquí un dado (fig. 216), es decir, un pequeño cubo en cuyas caras van marcados puntos desde 1 hasta 6.

Pedro apuesta a que, si echa cuatro veces seguidas el dado, una de estas cuatro veces caerá con un punto solo hacia arriba.

Vladimiro, en cambio, asegura que el punto solo no saldrá en ninguna de las cuatro jugadas o que, si sale, será más de una vez.

¿Quién tiene más probabilidades de ganar?

La cerradura Yale

Aunque esta cerradura se usa desde hace ya mucho tiempo (porque fue inventada en el año 1865), son aún pocos los que conocen su estructura. Por esto se oyen con frecuencia manifestaciones de duda acerca de que pueda existir un gran número de cerraduras de este tipo y de llaves para ellas. Sin embargo, basta conocer el ingenioso mecanismo de estas cerraduras para convencerse de que es posible diversificarlas en alto grado.

En la fig. 217, a la izquierda, se ve la parte «frontal» de la cerradura Yale. El nombre de esta cerradura es el de su inventor, el cerrajero norteamericano

Limus Yale. Alrededor del ojo de la cerradura se observa un pequeño círculo: esta es la base del tambor, que pasa a través de toda la cerradura. El problema de abrir la cerradura consiste en hacer girar este tambor, pero aquí está precisamente la dificultad. El tambor se mantiene en una posición determinada por medio de cinco tumbadores o clavijas de acero (fig. 217, a la derecha). Cada una de estas clavijas

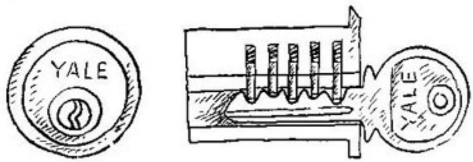


Figura 217

está cortada en dos y hasta que no se colocan de manera que todos estos cortes coinciden con la línea de contacto entre el tambor y el cilindro, es imposible conseguir que aquél gire.

Esta colocación se le da a las clavijas con una llave que tiene en su borde los salientes adecuados. Basta meter la llave, para que los tumbadores ocupen la única posición que hace posible la apertura de la cerradura.

Ahora es fácil comprender que el número de distintas cerraduras de este tipo puede ser realmente muy grande. Este número depende de la cantidad de procedimientos por que puede cortarse en dos cada clavija. En la práctica, esta cantidad, como es lógico, no es infinita, pero sí muy grande.

Suponga, por ejemplo, que cada clavija se puede cortar en dos partes sólo por 10 procedimientos e intente calcular cuántas cerraduras diferentes, de este tipo, se pueden hacer con esta condición.

¿Cuántos retratos?

Dibuje un retrato en un cartón y córtelo en tiras. Supongamos que lo corta en nueve tiras. Si sabe dibujar un poco, no le será difícil hacer otras tiras con las imágenes de las diversas partes de la cara, pero de tal modo, que dos tiras contiguas, aunque pertenezcan a diferentes retratos, puedan aplicarse la una a la otra sin que se note discontinuidad en los trazos. Si para cada parte de la cara hace usted cuatro tiras diferentes[1]), tendrá 36 tiras, con las cuales, juntándolas de nueve en nueve, podrá formar diversos retratos.

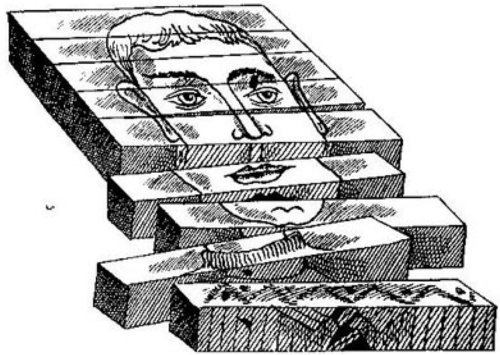


Figura 218

En los almacenes, donde en un tiempo se vendían juegos de tiras (o tarugos) para componer retratos (fig. 218), decían los dependientes que con las 36 tiras se podían obtener *mil* fisonomías distintas.

¿Es esto cierto?

Las hojas del árbol

Si a un árbol viejo cualquiera, por ejemplo, a un tilo, se le arrancan todas las hojas y se ponen unas al lado de otras, sin intervalos, ¿qué longitud aproximada tendrá la fila que forman? ¿Bastará para rodear con ella una casa grande?

En el ábaco

Es indudable que usted sabrá contar en el ábaco y que comprenderá lo fácil que es marcar en él 25 rublos.

Pero el problema se complica si le ponen la condición de que mueva no siete bolas, como se hace de ordinario, sino 25 bolas.

En efecto, haga usted la prueba de marcar en el ábaco la suma de 25 rublos, desplazando 25 bolas exactamente.

---

[1]) Lo más cómodo es pegarlas en las cuatro caras de unos tarugos, en forma de prisma cuadrangular regular.

En la práctica, claro está, esto no se hace nunca, pero el problema tiene solución y la respuesta es bastante interesante.

Un millón de pasos

Usted sabe perfectamente lo que es un millón y también lo que es la longitud de un paso suyo. Si esto es así, no le será difícil responder a la siguiente pregunta: ¿A qué distancia se alejará si da un millón de pasos, a más de 10 kilómetros o a menos?

El metro cúbico

En una escuela preguntó el maestro: ¿qué altura tendría la columna que se formara, si se pusieran uno encima de otro todos los milímetros cúbicos que contiene un metro cúbico?

—Sería más alta que la torre Eiffel (300 metros) — exclamó uno de los alumnos.

— Y más alta que el Mont Blana (5 kilómetros) —agregó otro.

¿Cuál de los dos se equivocó más?

¿Quién contó más?

Dos personas contaron durante una hora todos los transeúntes que pasaron junto a ellos por la acerca. Una los contaba desde la puerta de su casa, y la otra, yendo y viniendo por la acera.

¿Quién contó más transeúntes?

244-245

El vaso de guisantes

Si resolviéramos este problema a ojo, es seguro que cometeríamos una gran equivocación. Hay que hacer un cálculo, aunque sólo sea aproximado.

El diámetro de un guisante seco tiene cerca de $^1/_2$ centímetro. En un centímetro cúbico caben, por lo menos, $2 \times 2 \times 2 = 8$ guisantes (empaquetados densamente caben más). En un vaso, cuya capacidad sea de 250 cm^3, el número de guisantes será, por lo menos, de $8 \times 250 = 2000$. Insertados en un hilo se extenderán $^1/_2 \times 2000 = 1000$ cm, es decir, 10 m.

El agua y el vino

Al resolver este problema es fácil confundirse si no se tiene en cuenta que el volumen de los líquidos que hay en las botellas después de los transvases es igual al inicial, es decir, a 1 litro. Aclarado esto, razonaremos como sigue. Supongamos que, después de hacer el trasiego, en la segunda botella hay n cm^3 de vino y, por lo tanto, $(1000 - n)$ cm^3 de agua. ¿Adónde fueron a parar los n cm^3 de agua que faltan? Es evidente que deberán estar en la primera botella. Por consiguiente, después de hacer el transvase, en el vino hay tanta agua como en el agua vino.

El dado

Si el dado se lanza cuatro veces, el número total de las posiciones que puede tomar es igual a $6 \times 6 \times 6 \times 6 = 1296$. Supongamos que la primera jugada ya se ha hecho y que ha salido un solo punto. En este caso, en todas las demás tiradas, el número total de las posiciones que le convienen a Pedro, es decir, en que salga cualquier número de puntos que no sea uno, será $5 \times 5 \times 5 = 125$. Del mismo modo serán posibles, cada vez, 125 posiciones favorables para Pedro, si el único punto sale solamente en la segunda tirada, solamente en la tercera o solamente en la cuarta. Así, pues, existen $125 + 125 + 125 + 125 = 5\,000$ posibilidades distintas de que el punto único salga una y sólo una vez cuando el dado se lanza cuatro veces. En cambio, existen $1296 - 500 = 796$ posibilidades adversas, ya que todos los demás casos son desfavorables.

Vemos, por lo tanto, que Vladimiro tiene más posibilidades de ganar que Pedro: 796 contra 500.

La cerradura Yale

No es difícil calcular que el número de cerraduras diferentes es igual a $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100\,000$.

Cada una de estas 100 000 cerraduras tiene su llave correspondiente, única con que aquélla puede abrirse. La existencia de 100 mil cerraduras y llaves distintas constituye una garantía suficiente para el poseedor de una de ellas, ya que el que quisiera penetrar en su domicilio, valiéndose de otra llave, sólo tendría una probabilidad de la 100 mil de hallar la necesaria.

Nuestro cálculo ha sido al buen tuntún: lo hemos hecho suponiendo que cada clavija de la cerradura puede dividirse en dos partes sólo por diez procedimientos. En realidad es probable que pueda hecerse de más maneras, con lo que la cantidad de cerraduras diferentes aumenta considerablemente. De aquí se deduce la ventaja de este tipo de cerradura (si está bien hecha) frente a las ordinarias, entre las cuales, en cada docena hay una o dos iguales.

¿Cuántos retratos?

El número de retratos es mucho mayor que mil. Se pueden contar del modo siguiente. Designemos las nueve partes de los retratos por las cifras romanas I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII y IX; para cada parte tenemos cuatro tiras, que numeraremos con las cifras árabes 1, 2, 3 y 4.

Tomamos la tira I, 1. A ella podemos aplicarle las II, 1; II, 2; II, 3 y II, 4.

Por consiguiente, aquí pueden hacerse cuatro combinaciones. Pero como la parte I de la cabeza puede representarse por cuatro tiras (I, 1; I, 2; I, 3 y I, 4) y cada una de ellas puede acoplarse a la parte II por cuatro procedimientos distintos, resulta que las dos partes superiores de la cabeza I y II pueden unirse de $4 \times 4 = 16$ modos diferentes.

A cada una de estas 16 colocaciones se le puede adosar la parte III de cuatro maneras (III, 1; III, 2; III, 3 y III, 4); por lo tanto, las tres primeras partes de la fisonomía pueden combinarse de $16 \times 4 = 64$ modos distintos.

De la misma manera llegaremos a saber que las partes I, II, III y IV pueden disponerse de $64 \times 4 = 256$ formas diversas; las partes I, II, III, IV y V, de 1024; las I, II, III, IV, V y VI, de 4096, y así sucesivamente. Y finalmente, las nueve partes del retrato se pueden agrupar por $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$, es decir, 262 144 procedimientos.

Así, pues, con nuestros nueve tarugos se pueden componer no 1000, sino más de un *cuarto de millón* de retratos diferentes.

Este problema es bastante aleccionador: por él podemos comprender la causa de que sea tan difícil encontrar dos personas que tengan las mismas facciones. Ya en las «Enseñanzas» de Monomaj[1]) se expresa admiración por el hecho de que siendo enorme la cantidad de personas que hay en el mundo, cada una tiene su propia fisonomía. Pero nosotros acabamos de comprobar que, si el rostro humano se caracterizara solamente por nueve rasgos, que permitieran cada uno nada más que cuatro variantes, podrían existir más de 260 000 caras diferentes. Sin embargo, los rasgos característicos del rostro humano son en realidad más de nueve y pueden variar por más de cuatro procedimientos. Así, si los rasgos son 20 y cada uno varía de 10 modos, tendremos $10 \times 10 \times \times 10 \times 10 \ldots$ (20 factores), es decir, 10^{20} ó 100 000 000 000 000 000 000 de caras distintas.

Esta cantidad es muchas veces mayor que el número de personas que hay en todo el mundo.

Las hojas del árbol

No sólo una casa grande, sino hasta una ciudad no muy grande se podría rodear con las hojas puestas en fila de un árbol, porque esta fila se extendería... ¡unos doce kilómetros! Efectivamente, un árbol viejo no tiene menos de 200—300 mil hojas. Si admitimos que sean 250 mil y consideramos que cada hoja tiene 5 cm de anchura, la fila que se obtiene tendrá 1 250 000 cm de longitud, o sea, 12 500 m ó $12^1/_2$ kilómetros.

---

[1]) Vladímir Vsévolodovich Monomaj (1053-1125) Gran Príncipe de Kíev. (*N. del Tr.*)

En el ábaco

25 rublos se pueden marcar en el ábaco con 25 bolas, del modo siguiente:

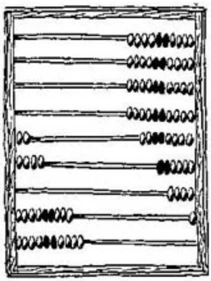


Figura 219

En efecto, aquí se han marcado 20 rublos + 4 rublos + 90 copeikas + 10 copeikas = = 25 rublos.

Y el número total de bolas es: $2 + 4 + 9 + 10 = 25$.

Un millón de pasos

Un millón de pasos son mucho más de 10 km, incluso más de 100 km. Si la longitud de un paso es aproximadamente igual a $^3/_4$ de metro, 100 000 pasos serán 750 km. Y como de Moscú a Leningrado sólo hay 640 km, si usted da un millón de pasos desde Moscú, se alejará más que la distancia que hay desde esta ciudad a Leningrado.

El metro cúbico

Las dos respuestas distan mucho de ser ciertas, porque la columna resultaría ser 100 veces más alta que la montaña más alta de la Tierra. En efecto, en un metro cúbico hay $1000 \times 1000 \times 1000$, o sea, un millar de millones de milímetros cúbicos. Puestos unos encima de otros, estos milímetros cúbicos formarían una columna de 1 000 000 000 mm de altura, es decir, de 1 000 000 m ó 1000 km.

¿Quién contó más?

Las dos contaron el mismo número de transeúntes. Efectivamente, aunque la que estaba en la puerta contó los transeúntes que pasaban en ambos sentidos, la que iba y venía por la acera vio doble número de personas yendo a su encuentro.

15

SITUACIONES EMBARAZOSAS

El maestro y el alumno

Lo que vamos a narrar más adelante dicen que ocurrió en la Grecia antigua. Un maestro en sabiduría, el sofista Protágoras, se encargó de enseñar a un joven todos los recursos del arte de la abogacía. El maestro y el alumno hicieron un contrato según el cual el segundo se comprometía a pagar al primero la retribución correspondiente en cuanto se revelaran por primera vez sus éxitos, es decir, inmediatamente después de ganar su primer pleito.

El joven cursó sus estudios completos. Protágoras esperaba que le pagase, pero su alumno no se apresuraba a tomar parte en juicio alguno. ¿Qué hacer? El maestro, para conseguir cobrar la deuda, lo llevó ante el tribunal. Protágoras razonaba así: si gano el pleito, me tendrá que pagar de acuerdo con la sentencia del tribunal; si lo pierdo y, por consiguiente lo gana él, también me tendrá que pagar, ya que, según el contrato, el joven tiene la obligación de pagarme en cuanto gane el primer pleito.

El alumno consideraba, en cambio, que el pleito entablado por Protágoras era absurdo. Por lo visto, el joven había aprendido algo de su maestro y pensaba así: si me condenan a pagar, de acuerdo con el contrato no debo hacerlo, puesto que habré perdido el primer pleito, y si el fallo es favorable al demandante, tampoco estaré obligado a abonarle nada, basándome en la sentencia del tribunal.

Llegó el día del juicio. El tribunal se encontró en un verdadero aprieto. Sin embargo, después de mucho pensarlo halló una salida y dictó un fallo que, sin contravenir las condiciones del contrato entre el maestro y el alumno, le daba al primero la posibilidad de recibir la retribución estipulada.

¿Cuál fue la sentencia del tribunal?

La herencia

He aquí otro problema muy remoto que solían plantearse entre sí los juristas de la antigua Roma.

Una viuda estaba obligada a repartirse, con el hijo que debía nacer, la herencia de 3500 rublos que le dejó su marido. Si nacía un niño, la madre, de acuerdo con las leyes romanas, debía recibir la mitad de la parte del hijo. Si nacía una niña, la madre recibiría el doble que la hija. Pero nacieron dos mellizos: un niño y una niña.

¿Cómo hay que dividir la herencia para cumplir las condiciones que la ley imponía?

El trasiego

Ante usted hay una jarra con 4 litros de leche. Tiene que dividir estos 4 l en partes iguales entre dos camaradas, pero sólo dispone de dos jarras vacías: una de $2^{1}/_{2}$ l de capacidad, y otra, de $1^{1}/_{2}$ l.

¿Cómo pueden dividirse los 4 l de leche en dos mitades, valiéndose tan sólo de estas tres vasijas?

Está claro que hay que hacer varios trasiegos de una jarra a otra.

Pero, ¿cómo deben hacerse?

¿Cómo alojarlos?

El administrador de guardia de un hotel se vio una vez en situación muy embarazosa. Llegaron de improviso 11 huéspedes y cada uno pedía habitación independiente. En el hotel sólo había 10 números libres. Los huéspedes eran muy exigentes y no había más remedio que alojar 11 personas en 10 habitaciones, de manera que, en cada una hubiera una sola persona. Esto, por lo visto, es imposible. Pero el administrador de guardia encontró una solución a tan difícil problema.

He aquí lo que ideó. En la primera habitación alojó al primer huesped y le pidió permiso para que, durante unos 5 minutos, se encontrara en su habitación el undécimo huesped. Cuando estos dos huéspedes quedaron acomodados, alojó:

el	3er	huésped	en	la	2ª	habitación
»	4º	»	»	»	3ª	»
»	5º	»	»	»	4ª	»
»	6º	»	»	»	5ª	»
»	7º	»	»	»	6ª	»
»	8º	»	»	»	7ª	»
»	9º	»	»	»	8ª	»
»	10º	»	»	»	9ª	»

Como puede verse, quedaba libre la 10ª habitación. En ella alojó al undécimo huésped, que temporalmente se encontraba en la primera habitación, con lo que quedó satisfecha toda la compañía y, seguramente, bastante admirados muchos lectores de este libro.

¿En qué consiste el secreto de esta treta?

Las dos velas

La luz eléctrica se apagó inesperadamente en el apartamento: se fundió el cortacircuitos. Yo encendí dos velas que tenía previstas en la mesa del escritorio, y seguí trabajando a su luz hasta que repararon la avería.

Al día siguiente fue necesario determinar cuánto tiempo estuvo sin corriente el apartamento. Yo no me di cuenta de qué hora era cuando se apagó la luz ni de a qué hora se volvió a encender. Tampoco sabía qué longitud inicial tenían las velas. Sólo recordaba que las dos velas eran igual de largas, pero de grosor distinto: la más gruesa era de las que se consumen por completo en 5 horas, y la otra, de las que duran 4 horas.

A ambas las encendí por primera vez. Los cabos de las velas no los encontré, los habían tirado.

—Eran tan pequeños —me dijeron— que no valía la pena guardarlos.

—Pero, ¿no recuerdan cómo eran de largos?

—Eran distintos. Uno era cuatro veces más largo que el otro.

Esto fue todo lo que pude saber. Tuve que limitarme a estos datos para calcular el tiempo durante el cual estuvieron encendidas las velas.

¿Cómo resolvería usted esta dificultad?

Los tres exploradores

En una situación no menos difícil se encontraron una vez tres exploradores a pie, que tenían que cruzar un río sin puente. Es cierto que por el río se paseaban en una canoa dos muchachos dispuestos a prestar ayuda a los soldados. Pero la canoa era tan pequeña, que sólo podía aguantar el peso de un soldado; incluso un soldado y un niño no podían montarse en ella sin peligro de zozobrar. Por otra parte, los soldados no sabían nadar.

En estas condiciones parecía que sólo un soldado podría pasar el río. No obstante, los tres exploradores estuvieron pronto en la orilla opuesta y devolvieron la barquilla a los muchachos.

¿Cómo consiguieron esto?

El hato de vacas

Esta es una de las variantes de un problema antiquísimo y muy interesante.

Un padre repartió entre sus hijos un hato de vacas. Al mayor le dio una vaca y $^1/_7$ de todas las demás; al segundo, dos vacas y $^1/_7$ de todas las demás; al tercero, tres vacas y $^1/_7$ de todas las demás; al cuarto, cuatro vacas y $^1/_7$ de todas las demás, y así sucesivamente. Así quedó repartido el hato entre los hijos sin que sobrara nada.

¿Cuántos eran los hijos y qué cantidad de vacas tenía el hato?

El metro cuadrado

Cuando Aliosha oyó por primera vez que un metro cuadrado tiene un millón de milímetros cuadrados, no quería creerlo.

—¿De dónde pueden salir tantos? —se asombraba—. Yo tengo una hoja de papel milimetrado que tiene exactamente un metro de longitud y otro de anchura. ¿Es posible que en este cuadrado haya un millón de cuadraditos milimétricos? ¡No lo creo!

—Pues, cuéntalos —le dijeron.

Y Aliosha se decidió a contar todos los cuadraditos. Se levantó por la mañana temprano y empezó a contar, señalando meticulosamente con un punto cada cuadradito contado.

En señalar un cuadradito tardaba un segundo y la cosa iba rápida.

Trabajó Aliosha sin enderezar el espinazo. Pero, ¿qué piensa usted?, ¿consiguió aquel día convencerse de que en un metro cuadrado hay un millón de milímetros cuadrados?

El ciento de nueces

Cien nueces deben repartirse entre 25 personas de manera que a ninguna de ellas le toque un número par de nueces.

¿Puede usted hacer esto?

¿Cómo repartir el dinero?

Dos pastores decidieron hacer gachas: uno de ellos echó en el caldero 200 g de harina y el otro, 300 g. Cuando las gachas estuvieron a punto y los pastores iban a empezar a comer, se unió a ellos un caminante.

Cuando se marchó, les dio, por haber comido con ellos, 50 copeikas.

¿Cómo deberán los pastores repartirse equitativamente el dinero recibido?

Un reparto de manzanas

Hay que dividir nueve manzanas en partes iguales entre 12 pioneros. El reparto se desea hacer de tal modo, que ninguna manzana quede dividida en más de cuatro partes. El problema, a primera vista, parece que no tiene solución, pero el que sabe quebrados puede resolverlo sin gran dificultad.

Una vez hallada la solución, tampoco será difícil resolver otro problema de este mismo tipo: repartir siete manzanas entre 12 niños, de manera que ninguna de ellas sea dividida en más de cuatro partes.

¿Cómo repartir las manzanas?

A casa de Miguelito vinieron cinco compañeros suyos. El padre de Miguelito quiso invitar a los seis niños a manzanas, pero resultó que solamente había cinco frutos. ¿Qué hacer? Como no quería disgustar a ninguno, tendría que repartirlas entre todos. Está claro que habría que cortar las manzanas. Pero cortarlas en trozos muy pequeños no estaba bien; el padre no quería que ninguna manzana fuera cortada en más de tres partes. Se planteaba, pues, el problema siguiente: repartir cinco manzanas, en partes iguales, entre seis niños, de manera que ninguna manzana resulte cortada en más de tres partes.

¿Cómo resolvió el padre de Miguelito este problema?

Una barca para tres

Tres aficionados al deporte del remo tienen una barca común y quieren arreglárselas de tal modo, que cada uno de ellos pueda utilizar la barca en cualquier instante, sin que ningún extraño pueda llevársela. Para esto piensan atar la barca con una cadena cerrada por tres candados.

Cada uno de los amigos tiene una sola llave, pero con ella puede abrir el candado y coger la barca sin esperar a que lleguen los otros con sus llaves.

¿Qué hicieron para que todo les saliera tan bien?

Esperando el tranvía

Tres hermanos, que volvían del teatro a casa, llegaron a la parada del tranvía dispuestos a montarse en el primer vagón que pasase. El tranvía no llegaba, pero el hermano mayor dijo que debían esperar.

—¿Para qué esperar aquí? —replicó el hermano de en medio—. Mejor es que sigamos adelante. Cuando el tranvía nos alcance, nos montamos en él, pero ya habremos recorrido parte del camino y llegaremos antes a casa.

—Si echamos a andar —opuso el hermano menor—, será preferible que vayamos no hacia adelante, sino hacia atrás: así encontraremos antes al tranvía que venga y antes estaremos en casa.

Como los hermanos no pudieron llegar a un acuerdo, cada uno hizo como pensaba: el mayor se quedó a esperar el tranvía, el de en medio, echó a andar hacia adelante, y el menor, hacia atrás.

¿Qué hermano llegó antes a casa y cuál de los tres procedió más lógicamente?

SOLUCIONES

El maestro y el alumno

La sentencia fue la siguiente: denegar la demanda del maestro, pero concediéndole el derecho a entablar querella por segunda vez, sobre una nueva base, a saber: la de que el alumno ya había ganado su primer pleito. Esta segunda demanda debería ser resuelta, indudablemente, a favor del maestro.

La herencia

La viuda debe recibir 1000 rublos, el hijo, 2000 rublos, y la hija, 500 rublos. En este caso se cumplirá la voluntad del testador, ya que la viuda recibe la mitad que el hijo y el doble que la hija.

El trasiego

Hay que hacer los siete trasiegos que se indican claramente en la tabla siguiente:

	4 l	$1^1/_2$ l	$2^1/_2$ l
1er trasiego	$1^1/_2$	—	$2^1/_2$
2º	$1^1/_2$	$1^1/_2$	1
3er	3	—	1
4º	3	1	—
5º	$^1/_2$	1	$2^1/_2$
6º	$^1/_2$	$1^1/_2$	2
7º	2	—	2

¿Cómo alojarlos?

El secreto consiste en que se quedó sin habitación el segundo huésped: después de los huéspedes 1° y 11° se pasó al 3°, olvidándose del 2°. Por esto se «consiguió» un alojamiento que era imposible a todas luces.

Las dos velas

Para resolver este problema hay que plantear una ecuación muy sencilla. Llamemos x al número de horas que estuvieron encendidas las velas. Cada hora ardía $^1/_5$ parte (de la longitud) de la vela gruesa y $^1/_4$ parte de la vela delgada. Por lo tanto, la longitud del cabo de la vela gruesa vendrá expresada (en fracciones de la longitud de la vela entera) por $1 - {}^x/_5$, y la del cabo de la delgada, por $1 - {}^x/_4$. Sabemos que las velas eran iguales de largas, y que el cuádruple de la longitud del cabo de la primera, $4(1 - {}^x/_5)$, era igual a la longitud $1 - {}^x/_4$ del cabo de la segunda:

$$4\left(1-\frac{x}{5}\right)=1-\frac{x}{4}.$$

Resolviendo esta ecuación hallamos que $x = 3^3/_4$.

Por lo tanto, las velas estuvieron encendidas 3 horas y 45 minutos.

Los tres exploradores

Hubo que hacer los seis viajes que siguen:

1er viaje. Los dos muchachos van a la orilla opuesta, uno se queda allí y el otro le trae la barca a los exploradores.

2° viaje. El muchacho que trajo la barca se queda en esta orilla y en la canoa se monta el primer soldado, el cual se traslada a la otra orilla. La barca la trae de vuelta el segundo muchacho.

3er viaje. Los dos muchachos cruzan el río en la barca, uno queda en la otra orilla y el otro vuelve con la barca.

4° viaje. El segundo soldado cruza el río. La barca vuelve con el muchacho que se quedó en la otra orilla.

5° viaje. Es una repetición del tercero.

6° viaje. El tercer soldado se traslada a la orilla opuesta. La barca regresa con un muchacho, se monta el otro y continúan su interrumpido paseo por el río.

Ahora los tres soldados están en la otra orilla.

El hato de vacas

Para resolver este problema por aritmética (es decir, sin recurrir a las ecuaciones) hay que empezar por el fin.

El hijo menor recibió tantas vacas como hermanos tenía, porque $^1/_7$ del hato restante no pudo recibir, ya que después de él no quedó ningún resto.

El hijo precedente recibió una vaca menos que hermanos tenía y, además $^1/_7$ del hato restante. Esto quiere decir, que lo que recibió el hijo menor eran la $^6/_7$ partes de este hato restante.

De aquí se deduce que el número de vacas que recibió el hijo menor debe ser divisible por seis.

Supongamos que este hijo menor recibió seis vacas y veamos si sirve esta suposición. Si el hijo menor recibió seis vacas, quiere decir que era el sexto hijo y que en total eran seis hermanos. El quinto hijo recibió cinco vacas y, además, $^1/_7$ de siete, es decir, seis vacas. Se comprende que los últimos hijos recibieron $6 + 6$ vacas, que constituyen las $^6/_7$ partes de las que quedaron después de recibir su parte el cuarto hijo. El resto completo sería $12 : {}^6/_7 = 14$ vacas; por consiguiente, el cuarto hijo recibió $4 + {}^{14}/_7 = 6$.

Calculamos el resto del hato después de recibir su parte el tercer hijo: $6 + 6 + 6$, es decir, 18, son las $^6/_7$ partes de dicho resto; por lo tanto, el resto completo será $18 : {}^6/_7 = 21$. Al tercer hijo le correspondieron, pues, $3 + {}^{21}/_7 = 6$ vacas.

Del mismo modo hallamos que los hijos segundo y primero también recibieron seis vacas cada uno.

Nuestra suposición ha resultado verosímil: los hijos eran seis en total y en el hato había 36 vacas.

¿Hay otras soluciones? Supongamos que los hijos no fueran seis, sino 12; esta suposición no sirve. Tampoco sirve el número 18. Y más adelante no vale la pena probar porque 24 o más hijos no podía tener.

El metro cuadrado

El mismo día era imposible que se convenciera Aliosha. Aunque hubiera estado contando día y noche sin descansar, en un día no hubiera contado nada más que 86 400 cuadraditos. Porque 24 horas tienen en total 86 400 segundos. Tendría que contar casi 12 días sin descanso, y si contara 8 horas al día, para llegar al millón necesitaría un mes.

El ciento de nueces

Muchos empiezan inmediatamente a probar todas las combinaciones posibles, pero su esfuerzo es vano. Sin embargo, basta pensar un poco para comprender la inutilidad de toda búsqueda: el problema no tiene solución.

Si el número 100 se pudiera dividir en 25 sumandos impares, resultaría que un número impar de números impares puede dar en total 100, es decir, un número par, cosa que, claro está, es imposible.

En efecto, tendríamos 12 pares de números impares y, además, un número impar; cada par de números impares da, como suma, un número par, por lo tanto, la suma de 12 números pares será también un número par, y si a esta suma se añade un número impar, se obtiene un resultado impar. El número 100 no puede componerse en modo alguno con estos sumandos.

¿Cómo repartir el dinero?

La mayoría de los que intentan resolver este problema responden, que el que echó 200 g debe recibir 20 copeikas, y el que echó 300 g, 30 copeikas. Este reparto carece de fundamento.

Hay que razonar así: las 50 copeikas deben considerarse como la parte a pagar por un comensal. Como los comensales fueron tres, el precio de las gachas (500 g de harina) es igual a 1 rublo 50 copeikas. El que echó los 200 g aportó, expresándolo en dinero, 60 copeikas (ya que los cien gramos cuestan $150 : 5 = 30$ copeikas), y comió por valor de 50 copeikas; por lo tanto habrá que darle $60 - 50 = 10$ copeikas.

El que aportó los 300 g (es decir, el equivalente a 90 copeikas en dinero) deberá recibir $90 - 50 = 40$ kopeikas.

Así, pues, de las 50 kopeikas, a uno le corresponden 10 copeikas y al otro 40 copeikas.

Un reparto de manzanas

El reparto de nueve manzanas, en partes iguales, entre 12 pioneros, sin cortar ninguna en más de cuatro partes, es completamente posible.

Hay que proceder así.

Seis manzanas se dividen en dos partes cada una y se obtienen 12 medias manzanas. Las tres manzanas restantes se dividen en cuatro partes iguales cada una, y resultan 12 cuartas partes de manzana. Ahora, a cada uno de los 12 pioneros se la da una mitad y una cuarta parte de manzana: $^1/_2 + {}^1/_4 = {}^3/_4$.

De este modo cada pionero recibe $^3/_4$ de manzana, que es lo que se requería, porque $9 : 12 = {}^3/_4$.

De una manera semejante se pueden repartir las siete manzanas entre los 12 pioneros, de modo que todos reciban la misma cantidad y ninguna manzana se corte en más de cuatro partes. En este caso cada uno debe recibir $^7/_{12}$ de manzana. Pero sabemos que $^7/_{12} = {^3/_{12}} + {^4/_{12}} = {^1/_4} + {^1/_3}$.

Por esto, dividiremos tres manzanas en cuatro partes cada una, y las cuatro manzanas restantes, en tres partes cada una. Resultan 12 cuartas partes y 12 terceras partes.

Está claro que a cada uno hay que darle una cuarta parte y una tercera parte, es decir, $^7/_{12}$ partes de manzana.

¿Cómo repartir las manzanas?

Las manzanas se repartieron como sigue. Tres manzanas se cortaron por la mitad y resultaron seis mitades, que se les dieron a los niños. Las dos manzanas restantes se cortaron cada una en tres partes iguales; salieron seis terceras partes, que también se repartieron entre los compañeros de Miguelito.

Por lo tanto, a cada niño se le dio media manzana y una tercera parte de manzana, es decir, todos recibieron la misma cantidad.

Como puede verse, ni una sola manzana fue cortada en más de tres partes iguales.

Una barca para tres

Los candados deben colgarse unos de otros como se ve en la fig. 220. Puede verse fácilmente que esta cadena de candados puede abrirla y volverla a cerrar con su llave cada uno de los propietarios de la barca.

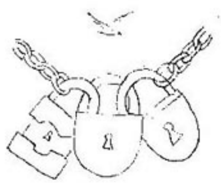


Figura 220

Esperando el tranvía

El hermano menor, yendo hacia atrás por la vía, vio el tranvía venir y se montó en él. Cuando este tranvía llegó a la parada en que estaba el hermano mayor, éste se subió a él. Un poco después, el mismo tranvía alcanzó al hermano de en medio, que había seguido adelante, y lo recogió. Los tres hermanos se encontraron en el mismo tranvía y, claro está, llegaron a casa al mismo tiempo.

Sin embargo, el que procedió más cuerdamente fue el hermano mayor, que esperó tranquilamente en la parada y se cansó menos que los demás.

PROBLEMAS DE LOS «VIAJES DE GULLIVER»

Las páginas más interesantes de los «Viajes de Gulliver a algunos países remotos» son sin duda aquellas en que se relatan sus extraordinarias aventuras en el país de los diminutos liliputienses y en el de los gigantes «brobdingnagianos». En el país de los liliputienses las dimensiones —altura, anchura y grosor— de todas las personas, animales, plantas y cosas eran 12 veces menores que las ordinarias en nuestro mundo. En el país de los gigantes, por el contrario, eran 12 veces mayores. Por qué eligió Swift, autor de los «Viajes de Gulliver», el número 12, es fácil de comprender si se recuerda que ésta es precisamente la relación del pie a la pulgada en el sistema métrico inglés (el autor de los «Viajes» era inglés). 12 veces menor o 12 veces mayor, parece que no son una disminución o aumento demasiado considerables. Sin embargo, la diferencia de la naturaleza y condiciones de vida en estos países fantásticos, con respecto a aquellas a que estamos acostumbrados, resultó ser extraordinaria. Con frecuencia esta diferencia llama tanto la atención, por lo insospechada que es, que da material para problemas complicados. Aquí queremos ofrecer a nuestros lectores una decena de estos rompecabezas.

Los animales de Liliput

«Para llevarme a la capital mandaron millar y medio de los más grandes caballos» —cuenta Gulliver del país de los liliputienses.

¿No le parece a usted que 1500 caballos son demasiados para este fin, aún teniendo en cuenta las dimensiones relativas de Gulliver y de los caballos liliputienses?

Acerca de las vacas, toros y ovejas de Liliput refiere Gulliver un hecho no menos sorprendente. Cuando se marchaba, ¡«se las metía en el bolsillo» simplemente! ¿Es posible esto?

El lecho era duro

De cómo los liliputienses prepararon el lecho para su gigantesco huésped, «Viajes de Gulliver» dice lo siguiente:

«Seiscientos colchones de dimensiones liliputienses ordinarias fueron traídos en carretas a mi local, donde los sastres iniciaron su trabajo. De un centenar y medio de colchones, cosidos entre sí, salió uno en el que cabía libremente a lo largo y a lo ancho. Pusieron, uno encima de otro, cuatro colchones como éste, pero aún así, este lecho era tan duro para mí como el suelo de piedra».

¿Por qué era tan duro este lecho para Gulliver?

¿Está bien hecho el cálculo que aquí se da?

La barca de Gulliver

Gulliver se fue de Liliput en una barca que casualmente llegó a sus costas. La barca pareció a los liliputienses un navío monstruoso, que superaba mucho las dimensiones de los barcos más grandes de su flota.

¿Podría usted calcular aproximadamente cuántas toneladas liliputienses de desplazamiento[1]) tenía esta barca, sabiendo que podía levantar 300 kg de carga?

El barril y el cubo de los liliputienses

«Cuando me harté de comer —dice después Gulliver sobre su estancia en Liliput—, dije por señas que quería beber. Los liliputienses, con gran destreza y valiéndose de unas cuerdas, elevaron hasta el nivel de mi cuerpo un barril de vino del mayor tamaño, le hicieron rodar hacia mi mano y le quitaron la tapa. Yo me bebí todo de un golpe. Me trajeron rodando otro, lo dejé seco de un trago, lo mismo que el primero, y pedí más, pero no tenían».

Figura 221

En otro pasaje dice Gulliver que los cubos de los liliputienses «no eran mayores que un dedal grande nuestro». ¿Es posible que fueran tan pequeños los barriles y los cubos en un país en que todos los objetos eran sólo 12 veces menores que los normales?

La ración y la comida de Gulliver

Los liliputienses, leemos en los «Viajes», establecieron para Gulliver la siguiente norma de productos alimenticios:

«Le será entregada diariamente una ración de comestibles y bebidas suficiente para alimentar 1728 súbditos de Liliput».

Figura 222

«Trescientos cocineros —cuenta Gulliver en otro pasaje— me preparaban la comida. Alrededor de mi casa montaron barracas, donde hacían los guisos y vivían los cocineros con sus familias. Cuando llegaba la hora de comer, cogía yo con la mano veinte servidores

[1]) El desplazamiento de un buque es igual a la carga máxima que éste puede levantar (incluyendo el peso del propio buque). Una tonelada es igual a 1000 kg.

y los ponía sobre la mesa, y unos cien me servían desde el suelo: unos servían las viandas, los demás traían los barriles de vino y de otras bebidas valiéndose de pértigas, que llevaban, entre dos, sobre los hombros. A medida que iba haciendo falta, los que estaban arriba subían todo a la mesa sirviéndose de cuerdas y poleas».

¿En qué cálculo se basaron los liliputienses para establecer una ración tan enorme y por qué hacía falta una cantidad tan grande de criados para alimentar a un solo hombre, que no era más que una docena de veces más alto que ellos? ¿Son proporcionales esta ración y apetito con la magnitud relativa de Gulliver y los liliputienes?

Figura 223

Los trescientos sastres

«300 sastres liliputienses recibieron la orden de hacerme un traje completo según los modelos locales». ¿Se necesita, acaso, un ejército de sastres como éste para hacerle un traje a un hombre, cuya talla sólo es una docena de veces mayor que la de un liliputiense?

Las manzanas y las avellanas gigantescas

«Una vez —leemos en los «Viajes de Gulliver a Brobdingnag (país de los gigantes)» — fue conmigo al huerto un enano palaciego. Aprovechando el momento en que yo, conforme iba paseando, me encontraba debajo de uno de los árboles, cogió él una rama y la sacudió sobre mi cabeza. Una granizada de manzanas del tamaño de un barrilete cayó ruidosamente al suelo; una me pegó en la espalda y me tiró...»

En otra ocasión «un travieso escolar me tiró una avellana a la cabeza y por poco me da, y la había lanzado con tal fuerza, que me hubiera descalabrado inevitablemente, porque la avellana era poco menor que una pequeña calabaza nuestra».

¿Cuánto piensa, usted, que pesarían aproximadamente la manzana y la avellana de los gigantes?

El anillo de los gigantes

Entre los objetos que sacó Gulliver del país de los gigantes había, según él, «un anillo de oro que me regaló la propia reina de Brobdingnag, quitándoselo graciosamente de su dedo meñique y poniéndomelo en el cuello como si fuera un collar».

¿Es posible que un anillo del dedo meñique, aunque fuera de una giganta, pudiera servirle de collar a Gulliver? ¿Cuánto pesaría este anillo?

Los libros de los gigantes

Acerca de los libros del país de los gigantes, Gulliver nos refiere los siguientes pormenores:

«Me dieron permiso para coger de la biblioteca libros que leer, pero para que yo pudiera leerlos hubo que hacer todo un dispositivo. Un carpintero me hizo una escalera de madera que podía trasladarse de un sitio a otro. Esta escalera tenía 25 pies de altura y la longitud de cada peldaño alcanzaba 50 pies. Cuando decía que quería leer, colocaban mi escalera a unos diez pies de la pared, con los peldaños vueltos hacia ésta, y en el suelo ponían el libro abierto, apoyándolo en la pared. Yo me subía al escalón más alto y empezaba a leer el renglón superior, recorriendo de izquierda a derecha y viceversa 8 ó 10 pasos, según fuera la longitud de los renglones. A medida que avanzaba la lectura y que los renglones se iban encontrando más abajo que el nivel de mis ojos, descendía yo al segundo peldaño, después al tercero y así sucesivamente.
Cuando terminaba de leer una página, volvía a encaramarme en lo más alto y comenzaba la página nueva del mismo modo que antes. Las hojas las pasaba con las dos manos, lo que no era difícil, porque el papel en que imprimen sus libros no es más grueso que nuestro cartón, y su mayor infolio no tiene más de 18—20 pies de largo».

¿Guarda proporción todo esto?

Los cuellos de los gigantes

Para terminar nos detendremos en un problema de este tipo no tomado directamente de la narración de las aventuras de Gulliver.

Usted quizá no sepa que el número del cuello no es otra cosa que el de centímetros de su perímetro. Si el perímetro de su cuello mide 38 cm, le vendrá bien un cuello del número 38; un cuello de un número menor le vendrá estrecho y uno de un número mayor le vendrá ancho. El perímetro del cuello de un hombre maduro tiene, por término medio, cerca de 40 cm. Si Gulliver hubiera querido encargar en Londres una partida de cuellos para los habitantes del país de los gigantes, ¿qué número hubiese tenido que encargar?

Los animales de Liliput

En la respuesta a «La ración y la comida de Gulliver» (pág. 263) se ha calculado que Gulliver, por el volumen de su cuerpo, era 1728 veces mayor que los liliputienses. Está claro que también era el mismo número de veces más pesado. Por lo tanto, a los liliputienses les era tan difícil transportar su cuerpo en un carruaje tirado por caballos, como transportar 1728 liliputienses adultos. Ahora se comprende por qué hubo que enganchar tal cantidad de caballos liliputienses al carro en que iba Gulliver.

Figura 224

Los animales de Liliput también eran 1728 veces menores en volumen, y, por lo tanto, la misma cantidad de veces más ligeros, que los nuestros.

Una vaca de las nuestras tiene metro y medio de altura y pesa, aproximadamente 400 kg. Una vaca de los liliputienses tenía 12 cm y pesaba $^{400}/_{1728}$ kg, es decir, menos de $^{1}/_{4}$ de kg. Está claro que una vaca de juguete como ésa, se puede meter en un bolsillo si se quiere.

«Sus caballos y toros más grandes —cuenta con toda veracidad Gulliver—, no medían más de 4—5 pulgadas de altura, las ovejas, cerca de $1^{1}/_{2}$ pulgada, los gansos eran como nuestros gorriones y así sucesivamente hasta los animales más diminutos. Sus animales pequeños eran casi invisibles a mis ojos. Vi como un cocinero desplumaba una alondra del tamaño de una mosca ordinaria o quizá menor; en otra ocasión una muchacha, en presencia mía, enhebraba un hilo invisible en una aguja que yo tampoco podía ver».

El lecho era duro

El cálculo está bien hecho. Si un colchón de los liliputienses era 12 veces más corto y, como es natural, 12 veces más estrecho que un colchón ordinario, su superficie sería 12×12 veces menor que la de nuestro colchón. Para que pudiera tumbarse Gulliver eran necesarios, por lo tanto, 144 (redondeando, 150) colchones liliputienses. Pero este colchón era muy delgado (12 veces más delgado que el nuestro). Ahora se comprende por qué, incluso cuatro capas de colchones de este tipo, no eran un lecho suficientemente blando: resultaba un colchón cuatro veces más delgado que el nuestro ordinario.

La barca de Gulliver

Sabemos por el libro que la barca de Gulliver podía levantar 300 kg, es decir, que desplazaba cerca de $^1/_3$ de t. Una tonelada es el peso de 1 m^3 de agua; por lo tanto, la barca desplazaba $^1/_3$ de m^3 de agua. Pero todas las medidas lineales de los liliputienses eran 12 veces menores que las nuestras, y las cúbicas, 1728 veces. Es fácil comprender que $^1/_3$ de nuestro metro cúbico contenía cerca de 575 m^3 de Liliput y que la barca de Gulliver tenía un desplazamiento de 575 t., o cerca de esto, ya que la cantidad inicial de 300 kg la hemos tomado arbitrariamente.

En nuestros días, cuando buques de decenas de miles de toneladas surcan los mares, un barco de estas dimensiones no asombraría a nadie, pero debe tenerse en cuenta que por los años en que fueron escritos los «Viajes de Gulliver» (a principios del siglo XVIII), eran todavía raros los navíos de 500—600 t.

El barril y el cubo de los liliputienses

Los barriles y los cubos de los liliputienses, si tenían la misma forma que los nuestros, debían ser 12 veces menores no sólo en altura, sino también en anchura y longitud, y, por lo tanto, su *volumen* sería $12 \times 12 \times 12 = 1728$ veces menor. Esto quiere decir, que si consideramos que en cubo nuestro caben 60 vasos, es fácil calcular que un cubo de los liliputienses sólo podía contener $^{60}/_{1728}$ o, redondeando, $^1/_{30}$ de vaso. Esto es un poquito más de una cucharilla de té y, en efecto, no supera la capacidad de un dedal grande.

Si la capacidad de un cubo de los liliputienses era igual a la de una cucharilla de té, la capacidad de un barril de vino, si cabían en él 10 cubos, no superaba medio vaso. ¿Qué tiene de particular que Gulliver no pudiera saciar su sed con dos barriles de éstos?

La ración y la comida de Gulliver

El cálculo es correcto. No hay que olvidar que los liliputienses, aunque pequeños, eran completamente semejantes a personas ordinarias y las partes de su cuerpo tenían las proporciones normales. Por lo tanto, no sólo eran 12 veces más bajos, sino también 12 veces más estrechos y 12 veces más delgados que Gulliver. Por esta razón, el volumen de su cuerpo no era 12 veces menor que el del cuerpo de Gulliver, sino $12 \times 12 \times 12$, es decir, 1728 veces menor. Y, está claro, para mantener la vida de un cuerpo así hace falta una cantidad de alimentos respectivamente mayor. He aquí por qué los liliputienses calcularon que a Gulliver le hacía falta una ración suficiente para alimentar a 1728 liliputienses.

Ahora se comprende para qué se necesitaban tantos cocineros. Para preparar 1728 comidas se precisan, por lo menos, 300 cocineros, considerando que un cocinero liliputiense puede guisar media docena de comidas liliputienses. Está claro que también se necesitaba una gran cantidad de gente para elevar esta carga hasta la mesa de Gulliver, cuya altura, como es fácil calcular, era comparable con la de una casa de tres pisos liliputienses.

Los trescientos sastres

La superficie del cuerpo de Gulliver no era 12 veces mayor que la del cuerpo de los liliputienses, sino 12×12, es decir, 144 veces mayor. Esto queda claro si nos figuramos que a cada pulgada cuadrada de la superficie del cuerpo de un liliputiense le corresponde un pie cuadrado de superficie del cuerpo de Gulliver, y el pie cuadrado tiene 144 pulgadas cuadradas. Si esto es así, para hacerle un traje a Gulliver haría falta 144 veces más paño que para el traje de un liliputiense y, por lo tanto, una cantidad respectivamente mayor de tiempo de trabajo. Si un sastre puede coser un traje en dos días, para coser 144 trajes (o un traje de Gulliver) en un día, se necesitarían precisamente unos 300 sastres.

Las manzanas y las avellanas gigantescas

Es fácil calcular que una manzana, que siendo de las nuestras pesa alrededor de 100 g, en el país de los gigantes debería pesar, de acuerdo con su volumen, 1728 veces mayor, 173 kg[1]). Una manzana así, si se cae del árbol y le pega a un hombre en la espalda, no es probable que lo deje vivo. Gulliver salió demasiado bien parado del peligro de que semejante carga lo aplastara.

Una avellana del país de los gigantes debería pesar 3 ó 4 kg, si se toma en consideración que una avellana de las nuestras pesa unos 2 g. Esta avellana gigantesca podría

Figura 225

tener alrededor de diez centímetros de diámetro. Y un objeto duro, de 3 kg de peso, lanzado con la velocidad que puede llevar una avellana, puede, naturalmente, romperle la cabeza a un hombre de dimensiones normales. Cuando en otro lugar dice Gulliver que una granizada ordinaria del país de los gigantes lo tiró al suelo y los granizos «le golpearon cruelmente la espalda, los costados y todo el cuerpo, como si fueran bolas grandes de madera de las de jugar al croquet», esto es completamente verosímil, porque cada granizo del país de los gigantes debería pesar no menos de un kilogramo.

El anillo de los gigantes

El diámetro del dedo meñique de una persona de dimensiones normales mide cerca de $1^1/_2$ cm. Multiplicando por 12, tendremos el diámetro del anillo de la giganta, $1^1/_2 \times 12 = 18$ cm; un anillo de este diámetro tiene una circunferencia de $18 \times 3^1/_7 =$ $= 56$ cm, aproximadamente.

[1]) Una manzana «antonovka» de a medio kilogramo (que las suele haber) debería pesar en el país de los gigantes ... ¡864 kg!

Estas dimensiones son suficientes para que pueda pasar por él una cabeza de tamaño normal (de lo que es fácil convencerse midiéndose con una cuerda la cabeza por su sitio más ancho).

Figura 226

En cuanto al peso de este anillo puede decirse que, si un anillito ordinario pesa, por ejemplo, 5 g, uno del mismo tipo, pero del país de los gigantes, pesaría... ¡$8^1/_2$ kg!

Los libros de los gigantes

Si se parte de las dimensiones de un libro moderno de formato ordinario (de 25 centímetros de largo y 12 de ancho), lo que dice Gulliver nos parece algo exagerado. Para leer un libro de menos de 3 m de altura y $1^1/_2$ de anchura no hace falta una escalera ni es necesario andar hacia la derecha y hacia la izquierda 8 ó 10 pasos. Pero en los tiem-

Figura 227

pos de Swift, es decir, a principios del siglo XVIII, el formato ordinario de los libros (infolio) era mucho mayor que ahora. El infolio, por ejemplo, de la «Aritmética» de Magnitski, que salió a luz en la época de Pedro I, tenía cerca de 30 cm de alto y 20 cm de ancho. Aumentando estas dimensiones 12 veces, obtenemos unas medidas imponentes para los libros de los gigantes, a saber: 360 cm (casi 4 m) de altura y 240 cm (2,4 m) de anchura. Leer un libro de 4 metros sin escalera es imposible. Y, sin embargo, esto no es aún un infolio de verdad, cuyas dimensiones son las de una hoja de periódico grande.

Pero incluso este modesto infolio debía pesar en el país de los gigantes 1728 veces más que en el nuestro, es decir, cerca de 3 t. Calculando que tuviera 500 hojas, obtenemos que cada hoja del libro de los gigantes pesaría unos 6 kg, lo que, para los dedos de la mano, resulta bastante oneroso.

Los cuellos de los gigantes

El perímetro del cuello de los gigantes sería tantas veces mayor que el del cuello de una persona normal, como veces mayor era su diámetro, es decir, 12 veces. Y si una persona normal necesita un cuello del número 40, un gigante gastaría el número $40 \times 12 = 480$.

Como vemos, todo lo que en Swift, al parecer, son imágenes tan raras de su fantasía, resulta que está meticulosamente calculado. Pushkin, respondiendo a ciertos reproches de los críticos a «Eugenio Oneguin» decía, que en su novela «el tiempo estaba calculado por el calendario». Con la misma razón podría decir Swift de «Gulliver» que todos su personajes están concienzudamente calculados según las reglas de la geometría[1]).

1) Pero no de acuerdo con las reglas de la *mecánica*, porque en este sentido pueden hacerse a Swift reproches importantes (Véase mi «Mecánica Recreativa»).

17

La recompensa

He aquí lo que, según la tradición, ocurrió hace muchos siglos en la Roma antigua[1]).

I. El caudillo Terencio, por orden del emperador, realizó una campaña victoriosa y volvío a Roma con trofeos. Cuando llegó a la capital, solicitó ser recibido por el emperador.

El emperador lo recibió afablemente, le agradeció los servicios militares que había prestado al imperio y le prometió, en recompensa, darle una alta posición en el senado.

Pero como a Terencio no era esto lo que le hacía falta, replicó:

—Muchas fueron las victorias que alcancé para acrecentar tu poderío y dar gloria a tu nombre. No he temido a la muerte, si hubiera tenido no una, sino muchas vidas, todas las habría inmolado por tí. Pero estoy cansado de guerrear; mi juventud ha pasado, la sangre corre ya más despacio por mis venas. Me ha llegado la hora de descansar en la casa de mis progenitores y de gozar las alegrías de la vida familiar.

—¿Qué deseas de mí, Terencio? —le preguntó el emperador.

—¡Escúchame, señor, con indulgencia! Durante los largos años de mi vida militar, cuando cada día teñía con sangre mi espada, no tuve tiempo de asegurar mi bienestar monetario. Soy pobre, señor...

—Prosigue, valeroso Terencio.

—Si quieres recompensar a tu humilde servidor —continuó el caudillo alentado—, ayúdame con tu generosidad a vivir en paz y en la abundancia, junto al hogar de mi familia, los días que me resten. Yo no busco honores ni una alta posición en el Senado todopoderoso. Quisiera apartarme del poder y de la vida social, para descansar tranquilo. Señor, dame dinero para asegurar el resto de mi vida.

El emperador —según reza la tradición— no brillaba por su generosidad. Le gustaba acumular dinero para él, pero era tacaño para gastarlo en otros. Por esto, la petición del caudillo le hizo pensar.

---

[1]) Esta narración, en interpretación libre, está tomada de un antiguo manuscrito latino perteneciente a una de las bibliotecas particulares de Inglaterra.

—¿Qué cantidad consideras suficiente para tí, Terencio? —le preguntó.

—Un millón de denarios, señor.

El emperador volvió a quedarse pensativo. El caudillo esperaba cabizbajo.

Por fin dijo el emperador:

—Valeroso Terencio, tú eres un gran guerrero y tus gloriosas hazañas merecen una gran recompensa. Yo te daré riqueza. Mañana a mediodía oirás aquí lo que he resuelto.

Terencio hizo una reverencia y se retiró.

II. Al día siguiente, a la hora fijada, se presentó el caudillo en el palacio del emperador.

—¡Salve, esforzado Terencio! —dijo el emperador.

Terencio inclinó sumisamente la cabeza.

—He venido, señor, a oír tu decisión. Prometiste generosamente que me recompensarías.

Y el emperador le respondió:

—No quiero que un guerrero tan noble como tú reciba por sus hazañas una mísera recompensa. Escúchame. En mi tesorería hay 10 millones de ases de cobre[1]). Atiende ahora mis palabras. Vas a la tesorería, coges una moneda, vuelves aquí y la depositas a mis pies. Al día siguiente irás otra vez a la tesorería coges una moneda igual a dos ases y la colocas aquí junto a la primera. El tercer día traerás una moneda de 4 ases; el cuarto, una de 8, el quinto, una de 16, y así sucesivamente duplicando el valor de la moneda. Yo ordenaré que cada día te hagan una moneda del valor correspondiente. Y mientras tengas fuerza suficiente para levantar las monedas, las irás sacando de mi tesorería. Nadie tiene derecho a ayudarte; debes utilizar solamente tu propia fureza. Y cuando te des cuenta de que ya no puedes levantar la moneda, para: nuestro convenio habrá terminado, pero todas las monedas que hayas logrado sacar serán para tí y ésa será tu recompensa.

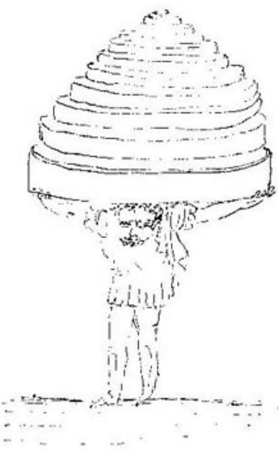


Figura 228

Terencio escuchaba codiciosamente cada palabra del emperador. Veía ya la cantidad enorme de monedas, una mayor que otra, que sacaría él de la tesorería del imperio.

—Tu recompensa es verdaderamente generosa —repuso sonriendo de gozo—. Estoy satisfecho de tu benevolencia, señor.

---

1) As, mondea igual a una décima parte del dinario.

III. Y comenzaron las visitas diarias de Terencio a la tesorería imperial. Esta se hallaba cerca de la sala en que recibía el emperador. Los primeros traslados de monedas no le costaron a Terencio ningún trabajo.

El primer día sacó de la tesorería sólo 1 as. Era una moneda pequeña, de 21 mm de diámetro y 5 g de peso[1]).

También fueron fáciles los traslados segundo, tercero, cuarto, quinto y sexto, en que el caudillo sacó monedas 2, 4, 8, 16 y 32 veces más pesadas que la primera.

La séptima moneda pesaba, en nuestro sistema de medidas, 320 g y tenía $8^1/_2$ cm de diámetro (más exactamente 84 mm)[2]).

El octavo día tuvo que sacar Terencio de la tesorería una moneda, equivalente a 128 monedas simples, que pesaba 640 g y tenía cerca de $10^1/_2$ cm de anchura.

El noveno día llevó Terencio a la sala del emperador una moneda igual a 256 monedas simples, que medía 13 cm de anchura y pesaba más de $1^1/_4$ kg.

El duodécimo día el diámetro de la moneda alcanzó casi 27 cm y su peso de $10^1/_4$ kg.

El emperador, que hasta entonces había mirado al caudillo amablemente, ahora lo hacía con aire de triunfo. Veían que ya eran 12 los traslados hechos, y que de la tesorería sólo habían salido 2000 y pico pequeñas monedas de cobre.

El día 13° le proporcionó al valiente Terencio una moneda igual a 4096 monedas simples. Tenía cerca de 34 cm de anchura y su peso equivalía a $20^1/_2$ kg.

El día 14° sacó Terencio de la tesorería una pesada moneda de 41 kg y cerca de 42 cm de anchura.

—¿No te has cansado, mi valiente Terencio? —le preguntó el emperador, conteniendo la risa.

—No, señor mío —le repuso sombrío el caudillo, limpiándose el sudor de la frente.

Llegó el día 15°. Pesada fue este día la carga de Terencio. Poco a poco llegó hasta el emperador llevando una enorme moneda equivalente a 16 384 monedas simples. Tenía 53 cm de anchura y pesaba 80 kg, lo mismo que un fuerte guerrero.

---

[1]) El peso de una moneda de 5 copeikas de cuño actual.

[2]) Si una moneda tiene 64 veces más volumen que la ordinaria, sólo será cuatro veces más ancha y más gruesa, porque $4 \times 4 \times 4 = 64$. Esto debe tenerse en cuenta más adelante al calcular las dimensiones de las monedas de que se habla en el cuento.

El 16° día, el caudillo se tambaleaba oprimido por la carga que llevaba acuestas. Era una moneda igual a 32 768 monedas simples, que pesaba 164 kg y cuyo diámetro alcanzó 67 cm.

El caudillo estaba agotado y respiraba con dificultad. El emperador se sonreía...

Cuando Terencio llegó al día siguiente a la sala en que recibía el emperador, fue acogido a carcajadas. Ya no podía llevar la carga sobre la espalda, y la iba rodando. Esta moneda tenía 84 cm de diámetro y pesaba 328 kg. Este peso correspondía al de 65 536 monedas simples.

El decimooctavo día fue el último del enriquecimiento de Terencio. Este día terminaron sus visitas a la tesorería y sus pesadas peregrinaciones a la sala del emperador. Esta vez tuvo que llevar una moneda que equivalía a 131 072 monedas simples. Tenía más de un metro de diámetro y pesaba 655 kg. Utilizando su lanza como palanca, Terencio a duras penas pudo hacerla rodar hasta la sala, donde cayó estrepitosamente a los pies del emperador.

Terencio estaba completamente extenuado.

—No puedo más... Basta —murmuró.

El emperador hizo un gran esfuerzo para contener la risa de satisfacción que le producía el rotundo éxito de su treta, y dio orden al tesorero de que calculase cuántos ases había llevado Terencio a la sala de recepción. El tesorero cumplió la orden y dijo:

—Soberano, gracias a tu benevolencia, el victorioso caudillo Terencio ha recibido como recompensa 262 143 ases.

Así, pues, el tacaño emperador sólo le dio a su caudillo cerca de la 40ª parte de la suma, de un millón de dinarios, que Terencio le había pedido.

* * *

Comprobemos el cálculo que hizo el tesorero y, a la vez, el peso de las monedas que sacó Terencio:

el	1er	día	1	que	pesaba	5 g
»	2º	»	2	»	»	10 »
»	3er	»	4	»	»	20 »
»	4º	»	8	»	»	40 »
»	5º	»	16	»	»	80 »
»	6º	»	32	»	»	160 »
»	7º	»	64	»	»	320 »
»	8º	»	128	»	»	640 »
»	9º	»	256	»	»	1 kg 280 »
»	10º	»	512	»	»	2 » 560 »

el	11°	día	1 024	que pesaban		5 kg	120 g
»	12°	»	2 048	»	»	10 »	240 »
»	13°	»	4 096	»	»	20 »	480 »
»	14°	»	8 192	»	»	40 »	960 »
»	15°	»	16 384	»	»	81 »	920 »
»	16°	»	32 768	»	»	163 »	840 »
»	17°	»	65 536	»	»	327 »	680 »
»	18°	»	131 072	»	»	655 »	360 »

La suma de los números de estas series se puede calcular fácilmente: la de la segunda columna es igual a 262 143, de acuerdo con la regla existente[1]). Terencio le pidió al emperador un millón de dinarios, o sea, 10 millones de ases. Por consigiente, recibió una suma 10 000 000 : 263 143 = 38 veces menor que la que había solicitado.

La leyenda del tablero de ajedrez

I. El ajedrez es uno de los juegos más antiguos que se conocen. Tiene ya muchos siglos de existencia y no es de extrañar que haya muchas tradiciones relacionadas con él, cuya veracidad, debido al mucho tiempo transcurrido, es imposible comprobar. Una de estas leyendas es la que quiero referir ahora. Para comprenderla no hay que saber jugar al ajedrez; basta saber que se juega sobre un tablero dividido en 64 casillas o escaques (negros y blancos alternativamente).

El ajedrez fue ideado en la India, y cuando el monarca hindú Sheram lo conoció, quedó admirado de su ingeniosidad y de la diversidad de situaciones que podían darse en él. Al saber que el juego había sido inventado por un súbdito suyo, ordenó que lo llamasen, para premiarlo personalmente por su feliz idea.

El inventor, que se llamaba Zeta, se presentó ante el trono del soberano. Era un sabio modestamente vestido, que vivía de lo que le pagaban sus discípulos.

—Quiero premiarte dignamente, Zeta, por el magnífico juego que has ideado —le dijo el monarca.

El sabio hizo una reverencia.

—Soy lo suficientemente rico para poder satisfacer tu deseo más atrevido —continuó el monarca—. Dime qué premio quieres y lo recibirás.

---

[1]) Cada número de esta serie es igual a la suma de todos los precedentes más una unidad. Por esto, cuando hay que sumar todos los números de una serie de este tipo, por ejemplo, de 1 a 32 768, nos limitamos a añadirle al último número (32 768) la suma de todos los precedentes, es decir, le añadimos el mismo número menos una unidad (32 768—1), y obtenemos 65 535.

Zeta permaneció callado.

—No seas tímido —le animó el monarca—. Expresa tu deseo. Para complacerte no escatimaré nada.

—Grande es tu bondad señor. Pero dame un plazo para pensar la respuesta. Mañana, después de reflexionar bien, te haré mi petición.

Figura 229

Cuando al día siguiente se presentó de nuevo Zeta ante los peldaños del trono, maravilló al monarca con la simpar modestia de su petición.

—Señor —dijo Zeta—, ordena que me den por el primer escaque del tablero de ajedrez un grano de trigo.

—¿Un simple grano de trigo? —se asombró el monarca.

—Sí, señor. Por el segundo escaque ordena que me den dos granos, por el tercero, cuatro, por el cuarto 8 por el quinto, 16, por el sexto, 32 ...

—¡Basta! —le interrumpió el monarca irritado—. Recibirás los granos de trigo por los 64 escaques del tablero, de acuerdo con tu petición, es decir, correspondiéndole a cada uno el doble que al precedente. Pero ten presente que tu petición es indigna de mi generosidad. Pidiendo una recompensa tan insignificante, menosprecias irrespetuosamente mi gracia. En verdad que, como maestro que eres, debías dar mejor ejemplo de respeto a la bondad de tu soberano. ¡Puedes retirarte! Mis servidores se sacarán el saco de trigo.

Zeta se sonrió al salir del salón y se puso a esperar a la puerta del palacio.

II

Durante la comida, el monarca se acordó del inventor del ajedrez y mandó que preguntaran si se había llevado ya el desatinado Zeta su miserable recompensa

—Señor —le respondieron—, tu orden se está cumpliendo. Los matemáticos de la corte están calculando el número de granos de trigo que hay que entregar.

El monarca se disgustó, no estaba acostumbrado a que su mandato se cumpliera tan lentamente.

Por la noche, cuando iba a acostarse, volvió Sheram a interesarse por el tiempo que hacía que Zeta había transpuesto con su saco de trigo la verja del palacio.

—Señor —le respondieron—, tus matemáticos siguen trabajando sin descanso y esperan que antes del alba terminarán el cálculo.

—¿Por qué demoran tanto este asunto? —exclamó el monarca—. Mañana, antes de que yo me despierte, debe serle entregado todo a Zeta, ¡hasta el último grano! Y, ¡que no tenga que dar dos veces la orden!

Por la mañana dieron cuenta al monarca de que el decano de los matemáticos de la corte pedía permiso para hacerle una información importante.

El monarca ordenó que lo hicieran pasar.

—Antes de que me hables de tu asunto —dijo Sheram—, deseo saber si le ha sido entregada a Zeta la miserable recompensa que él mismo fijó.

—Precisamente para eso me he atrevido a presentarme ante tí a una hora tan temprana —replicó el anciano—. Hemos calculado concienzudamente la cantidad de granos que desea recibir Zeta. Esta cantidad es tan grande...

—Por muy grandes que sea —le interrumpió orgullosamente el monarca—, mis graneros no se empobrecerán. La recompensa está prometida y debe darse...

—Señor, satisfacer ese deseo es imposible. En todos tus graneros no hay la cantidad de granos que pide Zeta. No los hay en todos los graneros de tu reino. Ni en toda la superficie de la Tierra se podría encontrar ese número de granos de trigo. Si deseas cumplir tu promesa a toda costa, manda convertir en campos labrados los reinos de la Tierra, manda secar los mares y océanos, manda fundir los hielos y las nieves que cubren los desiertos lejanos del norte. Que todo ese espacio sea completamente sembrado de trigo. Y todo lo que nazca en esos campos, ordena que se lo den a Zeta. Sólo entonces podrá recibir su recompensa.

El monarca escuchó boquiabierto las palabras del sabio.

—Pero dime, ¿qué monstruoso número es ese? —le dijo pensativo.

—Dieciocho trillones, cuatrocientos cuarenta y seis mil seiscientos cuarenta y cuatro billones, setenta y tres mil setecientos nueve millones, quinientos cincuenta y un mil seiscientos quince, señor.

III. Esta es la leyenda. ¿Ocurrió en realidad lo que en ella se cuenta? No lo sabemos. Pero que el premio de que habla la leyenda debería expresarse por dicho número, es cosa que puede usted comprobar si tiene paciencia para hacer el cálculo. Empezando por la unidad, hay que sumar los números 1, 2, 4, 8, 16, etc. El resultado de la 63ª duplicación indicará lo que había que darle al inventor por el 64° escaque.

Procediendo como se explicó en la página 271 hallamos sin dificultad la suma total de los granos debidos, si duplicamos el último número y le restamos una unidad. Por lo tanto, el cálculo se reduce solamente a multiplicar entre sí 64 doses: $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times \times 2 \times 2$ y así sucesivamente 64 veces.

Para simplificar las operaciones, dividimos estos 64 factores en seis grupos de a 10 doses y en uno, el último, de cuatro doses. El producto de 10 doses, como es fácil comprobar, es 1024, y el de cuatro doses, 16. Por consiguiente, el resultado que se busca es igual a $1024 \times 1024 \times 1024 \times 1024 \times 1024 \times \times 1024 \times 16$.

Haciendo la multiplicación 1024×1024 obtenemos 1 048 576.

Ahora nos queda hallar $1\,048\,576 \times 1\,048\,576 \times \times 1\,048\,576 \times 16$ y restarle al resultado una unidad, con lo cual conoceremos el número buscado de granos, es decir, 18 446 744 073 709 551 615.

Si desea usted saber lo enorme que es este número gigantesco, calcule las dimensiones que debería tener el granero capaz de contener esta cantidad de granos de trigo. Se sabe que un metro cúbico de trigo contiene cerca de 15 millones de granos. Por lo tanto, la recompensa al inventor del ajedrez debería ocupar un volumen aproximado de 12 000 000 000 000 m^3 o 12 000 km^3. Si el granero tuviera 4 m de altura y 10 m de anchura, su longitud debería ser de 300 000 000 km, es decir, ¡dos veces mayor que la distancia de la Tierra al Sol!

Está claro que el monarca hindú no podía dar un premio como éste. Pero si hubiera sabido matemáticas, le hubiese sido fácil liberarse de una deuda tan onerosa. Para esto no hubiera tenido que hacer más que proponer a Zeta que él mismo contara los granos, uno a uno, del trigo que debía recibir.

En efecto, si Zeta se hubiera puesto a contar sin descanso, día y noche, pasando un grano por segundo, el primer día sólo hubiese contado 86 400 granos. En contar un millón de granos tardaría no menos de 10 días. Un metro cúbico de trigo le llevaría aproximadamente medio año. Contando continuamente durante 10 años no reuniría más de 20 metros cúbicos. Como puede ver, aunque hubiera consagrado el resto de su vida a contar, Zeta sólo hubiese recibido una parte insignificante del premio que pidió.

Una propagación rápida

Una cápsula de amapola está llena de granitos minúsculos; de cada uno de ellos puede crecer una nueva planta. ¿Cuántas amapolas se obtendría si todas las semillas de una cápsula fueran fértiles? Para conocer esto hay que contar las semillas que hay en la cápsula. Esta ocupación es algo aburrida, pero el resultado es tan interesante que vale la pena armarse de paciencia y llevar la cuenta hasta el fin. Resulta que una cápsula de amapola contiene cerca de 3000 semillas.

¿Qué se deduce de esto? Se deduce que, si alrededor de nuestra amapola hay una superficie suficiente de tierra apropiada, cada semillita germinará y el verano siguiente crecerán en este sitio 3000 amapolas. ¡Todo un campo de amapolas procedente de una sola cápsula!

Pero veamos lo que ocurre después. Cada una de las 3000 plantas dará, por lo menos, una cápsula (lo más frecuente es que dé varias), que contendrá 3000 semillas. Al germinar, las semillas de cada cápsula darán 3000 plantas nuevas y, por consiguiente, al segundo año tendremos no menos de

$$3000 \times 3000 = 9\,000\,000 \text{ de plantas.}$$

Es fácil calcular que al tercer año el número de descendientes de nuestra única amapola inicial alcanzará ya

9 000 000 × 3000 = 27 000 000 000.

Y al cuarto año

27 000 000 000 × 3000 = 81 000 000 000 000.

Al quinto año el mundo les vendrá estrecho a las amapolas, porque el número de plantas sería igual a

81 000 000 000 000 × 3000 = 243 000 000 000 000 000.

El área de todas las tierras emergidas, es decir, de todos los continentes e islas de la Tierra es igual a 135 millones de kilómetros cuadrados (135 000 000 000 000 de metros cuadrados, o sea, 2000 veces menor que el número de amapolas que crecerían.

Como puede ver, si todas las semillas de la amapola germinaran, la descendencia de una sola planta podrían cubrir al cabo de cinco años la superficie de todas las tierras de la esfera terrestre, formando un tupido matorral, en el que habría 2000 plantas en cada metro cuadrado. ¡He aquí el gigante numérico que se oculta en cada diminuta semilla de amapola!

Haciendo un cálculo semejante para otra planta cualquiera que dé menos semillas, llegaríamos al mismo resultado, con la única diferencia de que su descendencia cubriría toda la superficie de la Tierra no en cinco años, sino en un plazo un poco mayor. Tomemos, por ejemplo, el diente de león, que da anualmente cerca de 100 semillas[1]). Si todas ellas germinaran, tendríamos:

el	1^{er} año	1	planta
»	2^{o} »	100	plantas
»	3^{er} »	10 000	»
»	4^{o} »	1 000 000	»
»	5^{o} »	100 000 000	»
»	6^{o} »	10 000 000 000	»
»	7^{o} »	1 000 000 000 000	»
»	8^{o} »	100 000 000 000 000	»
»	9^{o} »	10 000 000 000 000 000	»

1) En una cabezuela de diente de león llegaron a contarse cerca de 200 semillas.

Esta cifra es 70 veces mayor que el número de metros cuadrados que tiene la superficie de todas las tierras emergidas.

Por consiguiente, al noveno año todos los continentes de la Tierra estarían cubiertos de dientes de león, con una densidad de 70 plantas por metro cuadrado.

¿Por qué no observa en realidad esta reproducción extraordinariamente rápida? Porque la inmensa mayoría de las semillas perecen sin germinar: no caen en tierra apropiada y no germinan en absoluto, o dan brotes, pero son ahogados por otras plantas o destruidas por los animales. Si no existiera esta destrucción intensiva de las semillas y los brotes, cada planta podría cubrir completamente y en poco tiempo todo nuestro planeta.

Esto es cierto no sólo para las plantas, sino también para los animales. De no ser por la muerte, la descendencia de una pareja de animales cualesquiera, más tarde o más temprano, llenaría toda la Tierra. Las plagas de langosta, que cubren a veces enormes extensiones, pueden dar cierta idea de lo que ocurriría si la muerte no impidiera la multiplicación de los animales. Al cabo de dos o tres decenas de años se cubrirían los continentes de bosques y estepas intransitables, donde millones de animales lucharían entre sí por un sitio. El océano se poblaría de peces tan densamente, que la navegación sería imposible. Y el aire apenas si sería transparente, debido a la multitud de aves e insectos que pulularían en él.

Para terminar citaremos varios casos verídicos de multiplicación extraordinariamente rápida de animales colocados en condiciones propicias.

En América no existían gorriones al principio. Este pájaro, tan corriente en nuestras tierras, fue importado premeditadamente por los Estados Unidos para que destruyera los insectos perniciosos. Como es sabido, los gorriones se alimentan en abundancia de gusanos voraces y de otros insectos perjudiciales para las huertas y jardines. A los gorriones les gustó el nuevo ambiente; en América no había aves de rapiña que los destruyeran y ellos empezaron a multiplicarse rápidamente. La cantidad de insectos perniciosos empezó a disminuir notablemente, pero pronto los gorriones fueron tan numerosos, que faltos de alimento animal tuvieron que recurrir al vegetal, y empezaron a devastar los sembrados[1]). Hubo que comenzar la lucha contra los gorriones. Esta lucha le costó tan caro a los norteamericanos, que motivó una ley que prohibía en adelante la importación a EE.UU. de toda clase de animales.

Segundo caso. Cuando los europeos descubrieron Australia, en este país no había *conejos*. El conejo fue llevado allí a finales del siglo XVIII, y como no existían animales carnívoros que se alimentaran de ellos, la multiplicación de estos roedores adquirió un ritmo extraordinariamente rápido. Pronto una verdadera plaga de conejos invadió toda Australia, ocasionando daños horrorosos a la agricultura y convirtiéndose en un verdadero desastre. Medios enormes fueron lanzados a la lucha contra este azote de la agricultura, y solamente gracias a las enérgicas medidas tomadas fue posible poner fin a este infortunio. Una cosa muy parecida ocurrió en California también con los conejos.

El tercer caso aleccionador tuvo lugar en la isla de Jamaica. En esta isla había muchísimas serpientes venenosas. Para acabar con ellas se acordó llevar a la isla el *pájaro* llamado *secretario*, furioso destructor de las serpientes venenosas. El número de serpientes disminuyó, en efecto, rápidamente, pero, en cambio, se propagaron extraordinariamente las ratas de campo, que antes eran devoradas por las serpientes. Las ratas ocasionaron tales destrozos en las plantaciones de caña de azúcar, que hubo que pensar seriamente en cómo exterminarlas. Se sabe que uno de los mayores enemigos de las ratas es la *mangosta* de la India. Se resolvió llevar a Jamaica cuatro parejas de estos animales y dejar que se propagaran libremente. Las mangostas se aclimataron bien a su nueva patria y pronto poblaron toda la isla. Antes de 10 años habían exterminado a las ratas casi por completo. Pero cuando se acabaron las ratas, las mangostas empezaron a alimentarse de lo que podían y se hicieron omnívoras: atacaban a los cachorros, cabritos, lechones y aves de corral, y se comían los huevos. Y cuando se multiplicaron aún más, empezaron con los árboles frutales, los campos de trigo y las plantaciones. Los isleños tuvieron que emprender la persecución de las que fueron aliados, pero sólo lograron limitar hasta cierto punto el daño ocasionado por las mangostas.

---

[1]) Y en las islas Hawai desplazaron totalmente a todos los pájaros pequeños.

El almuerzo gratuito

10 jovenes decidieron celebrar con un almuerzo camaraderil, en un restaurante, la terminación de sus estudios en la escuela de enseñanza media. Cuando se reunieron todos y ya habían servido el primer plato, empezaron a discutir acerca de cómo sentarse a la mesa. Unos proponían colocarse por orden alfabético, otros, por edades, los terceros, por las calificaciones obtenidas, los cuartos, por estaturas, etc.

La discusión se prolongó, la sopa tuvo tiempo de enfriarse, pero a la mesa nadie se sentaba.

Los reconcilió el camarero, que les dirigió las palabras siguientes:

—Amigos jóvenes, dejad vuestra disputa, sentaos a la mesa de cualquier modo y escuchadme.

Todos se sentaron y el camarero prosiguió:

—Que uno de vosotros apunte el orden en que acabáis de sentarse. Mañana venid de nuevo a comer aquí y sentaos en otro orden. Pasado mañana vuélvanse a sentar de otro modo y así sucesivamente hasta que prueben todas las colocaciones posibles. Cuando llegue el turno de volverse a sentar como ahora, yo prometo solemnemente que empezaré a invitarles diariamente con las comidas más exquisitas y sin cobrarles nada.

La proposición gustó. Acordaron reunirse cada día en este restaurante y probar todas las maneras posibles de sentarse a la mesa, para cuanto antes comenzar a disfrutar de las comidas gratuitas.

Pero ese día no llegó. Y no porque el camarero no quisiera cumplir su promesa, sino porque el número de todas las colocaciones posibles es demasiado grande. Este número es igual a 3 628 800, ni más ni menos. Esta cantidad de días, como no es difícil calcular, constituye... ¡Casi 10 mil años!

A usted quiza le parezca exagerado que 10 personas puedan sentarse a la mesa de tantas maneras distintas. En este caso, compruebe el cálculo.

En primer lugar hay que aprender a determinar el número de permutaciones. Para simplificar empezaremos el cálculo con un número pequeño de objetos, por ejemplo, con tres. Llamémosles A, B y C.

Queremos saber de cuántas maneras se pueden cambiar de sitio, poniendo uno en lugar de otro. Razonamos así. Si dejamos aparte el objeto C, los otros dos pueden colocarse solamente de dos maneras.

Ahora vamos a agregar el objeto C a cada una de estas parejas. Lo podemos hacer de tres modos:

1) poniendo C *detrás* de la pareja;
2) » C *delante* de la pareja;
3) » C *entre* los objetos que forman la pareja.

El objeto C, además de estas tres posiciones, es evidente que no puede tener otras. Pero cuando tenemos *dos* parejas, AB y BA, el número total de maneras en que pueden colocarse los tres objetos será $2 \times 3 = 6$.

Sigamos adelante. Hagamos el cálculo para cuatro objetos. Sean estos A, B, C y D. Lo mismo que antes, dejamos aparte uno de los objetos, por ejemplo, el D, y con los restantes hacemos todas las combinaciones posibles. Ya sabemos que el número de estas combinaciones es seis. ¿Por cuántos procedimientos se puede añadir el cuarto objeto, D, a cada una de estas seis triadas? Es evidente que se puede:

1) poner D *detrás* de la triada;
2) » D *delante* de la triada;
3) » D *entre* el objeto primero y segundo;
4) » D *entre* el objeto segundo y tercero.

Obtenemos, por consiguiente, en total $6 \times 4 = 24$ combinaciones; y como $6 = 2 \times 3$, y $2 = 1 \times 2$, el número total de todas las permutaciones se puede representar en forma del producto $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$.

Razonando de este modo, en el caso de cinco objetos sabremos que el número de combinaciones correspondientes es igual a $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$.

Si los objetos son seis, tendremos $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$, y así sucesivamente.

Volvamos ahora al caso de los 10 comensales. El número de sus posibles permutaciones podremos determinarlo tomándonos la molestia de hacer la multiplicación $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10$.

El número que se obtiene, como ya se dijo antes, es 3 628 800.

El cálculo será más difícil si entre los 10 comensales hubiese cinco muchachas y quisieran sentarse a la mesa alternando con los jóvenes. Aunque en este caso el número de los posibles traslados es mucho menor, su cálculo es algo más complicado.

Supongamos que uno de los jóvenes se sienta a la mesa en un sitio cualquiera. Los cuatro restantes podrán sentarse, dejando entre ellos sillas vacías para las muchachas, de $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ maneras diferentes. Como el número total de sillas es 10, el primer joven podrá sentarse en 10 sitios; por lo tanto, el número total de combinaciones que pueden hacer los jóvenes será $10 \times 24 = 240$. ■

¿De cuántas maneras podrán sentarse las muchachas en las sillas vacías que hay entre los jóvenes? Evidentemente que de $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ maneras. Combinando cada una de las 240 posiciones de los jóvenes con cada una de las 120 posiciones de las muchachas, obtenemos el número total de las colocaciones posibles, es decir, $240 \times 120 = 28\,800$.

Este número es mucho menor que el anterior y requeriría solamente un poco menos de 79 años. Si los jóvenes clientes del restaurante llegasen a vivir hasta los 100 años, podrían recibir la comida gratuita, si no del mismo camarero, de uno de sus herederos.

Sabiendo contar las permutaciones, podremos determinar ahora cuántas combinaciones diferentes pueden hacerse con las fichas en la cajita del «juego de los 15»[1]. En otras palabras, podemos calcular el número total de problemas que puede ofrecernos este juego. Es fácil comprender que este cálculo se reduce a determinar el número de permutaciones de 15 objetos. Como sabemos, para esto hay que multiplicar $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times$ $\times$ ... y así sucesivamente ... $\times 14 \times 15$.

Este cálculo da el resultado siguiente: 1 307 674 365 000, es decir, más de un billón.

De este enorme número de problemas, la mitad es imposible de resolver. Existen, pues, más de 600 millares de millones de posiciones imposibles de resolver en este juego. Por esto se comprende en parte la epidemia de entusiasmo despertado por el «juego de los 15», que se apoderó de la gente que no sospechaba la existencia de un número tan enorme de casos insolubles.

Advertimos también, que si fuera imaginable dar a las fichas una nueva posición cada segundo, para probar todas las posiciones posibles sería necesario trabajar sin descanso, día y noche, durante más de 40 mil años.

Para terminar esta charla acerca del número de permutaciones, resolveremos un problema de este tipo tomado de la vida escolar.

En una clase hay 25 alumnos. ¿De cuántas formas pueden sentarse en los pupitres?

---

[1]) En este caso siempre debe quedar libre la casilla del ángulo inferior derecho.

El camino a seguir para resolver este problema (para los que han asimilado lo dicho anteriormente) es muy sencillo: hay que multiplicar los 25 números siguientes: $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times \ldots \times 23 \times \times 25$.

Las matemáticas enseñan procedimientos para simplificar los cálculos, pero no saben facilitar las operaciones del tipo de la indicada. Para hacer *con exactitud* este cálculo no existe más procedimiento que multiplicar atentamente todos los números. Con lo único que puede ganar un poco de tiempo en las operaciones es agrupando eficazmente los factores. El resultado que se obtiene es un número enorme, de 26 cifras, cuya magnitud es imposible imaginar.

Este número es: 15 511 210 043 330 985 984 000 000.

De todos los números con que nos hemos encontrado hasta ahora, éste es, sin duda, el más grande, y a él, más que a ningún otro, le corresponde merecidamente el título de «número enorme». El número de diminutas gotitas de agua que hay en todos los océanos y mares de la Tierra es modesto comparado con este número descomunal.

282-283

Con siete cifras

Escriba, una detrás de otra, siete cifras del 1 al 7: 1 2 3 4 5 6 7.

Estas cifras pueden unirse entre sí por medio de signos más y menos, de modo que se obtenga el resultado 40:

$$12 + 34 - 5 + 6 - 7 = 40.$$

Procure usted encontrar ahora otra combinación de estas mismas cifras que dé 55 y no 40.

Nueve cifras

Escriba sucesivamente nueve cifras: 1 2 3 4 5 6 7 8 9.

Sin alterar su orden, puede usted poner entre ellas signos más y menos, de modo que el resultado que den sea exactamente 100.

Por ejemplo, no es difícil, poniendo seis signos (más o menos), obtener el número 100 del siguiente modo:

$$12 + 3 - 4 + 5 + 67 + 8 + 9 = 100.$$

Si sólo quiere poner cuatro signos (más o menos), también puede obtener 100:

$$123 + 4 - 5 + 67 - 89 = 100.$$

Pero intente usted obtener 100 utilizando los signos más y menos sólo tres veces.

Esto es mucho más difícil, pero completamente posible; lo único que hay que hacer es buscar la solución con paciencia.

Con diez cifras

Exprese usted el número 100 empleando todas las 10 cifras.

¿Por cuántos procedimientos puede hacerlo? Existen no menos de cuatro procedimientos.

La unidad

Exprese usted la unidad valiéndose de todas las diez cifras.

Con cinco doses

Dispone usted de cinco doses y de los signos de las operaciones matemáticas que crea necesarios. Valiéndose solamente de este material numérico, aprovechándolo totalmente y utilizando los signos de las operaciones matemáticas, exprese los números siguientes: 15, 11 y 12 321.

Otra vez con cinco doses

¿Puede expresarse el número 28 con cinco doses?

Con cuatro doses

Este problema es más difícil que los precedentes. Hay que expresar el número 111 por medio de cuatro doses. ¿Puede expresarse?

Con cinco treses

Usted sabe, como es natural, que con cinco treses y los signos de las operaciones matemáticas se puede escribir el número 100 así:

$$33 \times 3 + \frac{3}{3} = 100.$$

Pero, ¿puede escribirse el número 10 con cinco treses?

El número 37

Escriba de un modo semejante el número 37, utilizando solamente cinco treses y los signos de las operaciones.

Por cuatro procedimientos

Exprese el número 100, con cinco cifras iguales, por cuatro procedimientos diferentes.

Con cuatro treses

Expresar el número 12 por medio de cuatro treses es muy sencillo:

$$12 = 3 + 3 + 3 + 3.$$

Un poco más ingenioso es expresar de un modo semejante los números 15 y 18 con cuatro treses:

$$15 = (3 + 3) + (3 \times 3);$$

$$18 = (3 \times 3) + (3 \times 3).$$

Pero si fuera necesario expresar, de este mismo modo, el número 5 por medio de cuatro treses, lo más probable es que no cayese pronto en que $5 = \frac{3+3}{3} + 3$.

Pruebe ahora a buscar por su cuenta los procedimientos para expresar con cuatro treses los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, es decir, todos los números del 1 al 10 (ya hemos dicho como se escribe el número 5).

Con cuatro cuatros

Si ha conseguido resolver el problema anterior y le gustan estos rompecabezas, intente componer todos los números del 1 al 100 con cuatro cuatros. Esto no es más difícil que expresar estos mismos números con treses.

Con cuatro cincos

Hay que expresar el número 16 valiéndose de cuatro cincos unidos entre sí por los signos de las operaciones.

¿Cómo puede hacerse?

Con cinco nueves

Exprese el número 10 con cinco nueves. Hágalo, por lo menos, por dos procedimientos.

Veinticuatro

Es muy fácil expresar el número 24 por tres ochos: $8 + 8 + 8$. Pero, ¿puede usted hacer lo mismo con otras tres cifras iguales? Este problema tiene más de una solución.

Treinta

El número 30 es fácil de representar con tres cincos: $5 \times 5 + 5$. Hacer esto mismo con otras tres cifras iguales es más difícil. Haga la prueba. Quizá logre encontrar varias soluciones.

Mil

¿Puede usted expresar el número 1000 con ocho cifras iguales? Además de las cifras pueden utilizarse los signos de las operaciones.

¿Cómo obtener veinte?

Aquí ve usted tres números, escritos uno debajo de otro,

111
777
999

Hay que tachar seis de estas cifras de tal modo, que los números que queden sumen 20.

¿Puede usted hacerlo?

Tachar nueve cifras

La siguiente columna de cinco filas contiene 15 cifras impares:

1 1 1
3 3 3
5 5 5
7 7 7
9 9 9

El problema consiste en tachar nueve cifras, eligiéndolas de manera, que al sumar las columnas de las seis cifras restantes se obtenga el resultado 1111.

En el espejo

¿Qué año del siglo pasado aumenta $4^1/_2$ veces si se mira su imagen en el espejo?

¿Qué año?

¿Hay algún año del siglo actual que no varíe al ponerlo «cabeza abajo»?

¿Qué números?

¿Qué dos números enteros, si se multiplican entre sí dan 7?

No olvide que los dos números han de ser *enteros*; por lo tanto, las soluciones del tipo $3^1/_2 \times 2$ ó $2^1/_3 \times 3$ no valen.

Sumar y multiplicar

¿Qué dos números enteros dan más sumándolos que multiplicándolos entre sí?

Lo mismo

¿Qué dos números enteros dan lo mismo si se multiplican entre sí que si se suman?

Número par primo

Usted sabe, claro está, qué números se llaman primos o simples: los que sólo se dividen exactamente por sí mismos y por la unidad. Los demás números se llaman compuestos.

¿Qué piensa usted, son compuestos todos los números pares o existen algunos que son primos?

Tres números

¿Qué tres números enteros, si se multiplican entre sí, dan lo mismo que se obtiene de su suma?

Suma y multiplicación

Es indudable que usted ya se habrá fijado en la curiosa peculiaridad de las igualdades

$2+2=4, \quad 2\times 2=4.$

Este es el único ejemplo en que la suma y el producto de dos números enteros (iguales) dan el mismo resultado.

Pero es muy posible que usted no sepa que existen números que, sin ser iguales, poseen esta misma propiedad, es decir, su suma es igual a su producto.

Procure encontrar ejemplos de estos números. Para que no crea que su búsqueda será inútil, le diré que hay muchos números de éstos, pero que no todos son enteros.

Multiplicación y división

¿Qué dos números enteros, si se divide el mayor por el menor, dan lo mismo que se obtiene cuando se multiplican entre sí?

Un número de dos cifras

Si cierto número de dos cifras se divide por la suma de sus cifras, como resultado vuelve a obtenerse la suma de las cifras del dividendo. Halle este número.

Diez veces mayor

Los números 12 y 60 tienen una propiedad interesante: si se multiplican, se obtiene un número exactamente 10 veces mayor que si se suman:

$12\times 60=720, \quad 12+60=72.$

Intente encontrar otra pareja como ésta. Si tiene suerte, quizá pueda encontrar varios números con esta misma propiedad.

Con dos cifras

¿Cuál es el menor número entero y positivo que puede escribir usted con dos cifras?

El número mayor

¿Cuál es el mayor número que puede usted escribir con cuatro unos?

Quebrados singulares

Fíjese atentamente en el quebrado $\frac{6729}{13\,458}$. En él se ha utilizado una vez cada una de las nueve cifras significativas. Este quebrado, como es fácil comprobar, es igual a $\frac{1}{2}$.

¿Podría usted, siguiendo este modelo, componer con las nueve cifras los quebrados $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{9}$?

¿Por cuánto multiplicó?

Un escolar hizo una multiplicación y después borró del encerado gran parte de las cifras, de modo que sólo se conservó la primera fila de números y dos cifras de la última fila; de las demás únicamente quedaron vestigios. Lo que siguió escrito era:

$$\begin{array}{r} 235 \\ \times\ {*}{*} \\ \hline {*}{*}{*}{*} \\ {*}{*}{*}{*} \\ \hline {*}{*}56{*} \end{array}$$

¿Podría usted restablecer el número por el cual multiplicó el escolar?

¿Qué cifras faltan?

En este ejemplo de multiplicación más de la mitad de las cifras se han sustituido por asteriscos:

$$\begin{array}{r} {*}1{*} \\ \times\ 3{*}2 \\ \hline {*}3{*} \\ +\ 3{*}2{*} \\ {*}2{*}5 \\ \hline 1{*}8{*}30 \end{array}$$

¿Podría usted restablecer las cifras que faltan?

¿Qué números?

He aquí otro problema del mismo tipo. Hay que establecer qué números son los que se multiplican en el ejemplo siguiente:

$$
\begin{array}{r}
**5 \\
\times \quad 1** \\
\hline
2**5 \\
+ \quad 13*0 \\
*** \\
\hline
4*77*
\end{array}
$$

Casos raros de multiplicación

Observe el siguiente caso de multiplicación de dos números:

$48 \times 159 = 7632.$

Llama la atención porque en él participa una vez cada una de las nueve cifras significativas.

¿Podría usted seleccionar varios ejemplos más de este tipo? Si los hay, ¿cuántos son los que existen?

Una división misteriosa

Esto que aquí se representa no es más que un ejemplo de división de dos números de varias cifras, en el cual todas ellas se han sustituido por puntos:

```
........  | ...
....      |-----
------    | .....
 ....
  ...
 -----
   ...
   ...
  -----
   ....
   ....
  -----
```

No se da ni una sola cifra del dividendo ni del divisor. Se sabe únicamente que la *penúltima* cifra del cociente es 7. Hay que hallar el resultado de esta división.

Advertimos, por si acaso, que todos los números se consideran escritos aquí según el sistema de numeración decimal.

Este problema sólo tiene una solución.

¿Qué se dividió?

Restablezca las cifras que faltan en el siguiente ejemplo de división:

```
*2*5*  | 325
***    |-----
-----  | 1**
*0**
*9**
------
  *5*
  *5*
  ---
```

División po 11

Escriba cualquier número de nueve cifras, en que no se repita ninguna de ellas (es decir, que tenga todas las cifras diferentes), que sea divisible por 11 exactamente. Escriba el menor de estos números. Escriba el mayor de estos números.

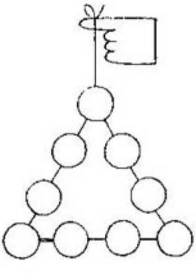


Figura 230

Triángulo numérico

Distribuya las nueve cifras significativas por los círculos de este triángulo (fig. 230), de modo que en cada lado sumen 20.

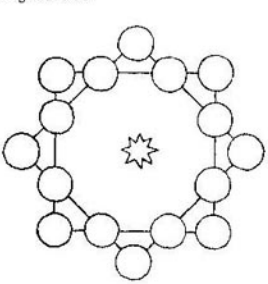


Figura 231

Otro triángulo numérico

Distribuir todas las cifras significativas por los círculos del mismo triángulo de manera que en cada lado sumen 17.

La estrella de ocho puntas

Los números del 1 al 16 deben situarse en los puntos de intersección de las líneas del dibujo representado en la fig. 231, de modo que la suma de los números que hay en cualquiera de los lados de cada cuadrado sea 34 y la de los que hay en los vértices de cada cuadrado también sea 34.

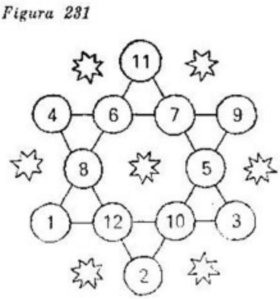


Figura 232

La estrella mágica

La estrella numérica de seis puntas representada en la fig. 232 posee una propiedad «mágica»: todas sus seis filas de números suman lo mismo:

$4+6+7+9=26,$
$4+8+12+2=26,$
$9+5+10+2=26,$
$11+6+8+1=26,$
$11+7+5+3=26,$
$1+12+10+3=26,$

Pero la suma de los números situados en las puntas de la estrella es otra:

$$4 + 11 + 9 + 3 + 2 + 1 = 30.$$

¿No podría usted perfeccionar esta estrella colocando los números en los círculos de tal manera que no sólo las filas rectas den la misma suma (26), sino que también compongan esta suma (26) los números situados en sus puntas?

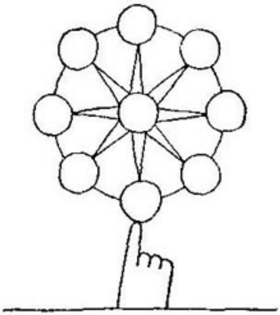


Figura 233

La rueda numérica

Las cifras del 1 al 9 deben disponerse en el dibujo de la fig. 233, de modo que, estando una en el centro de la circunferencia y las demás en los extremos de los diámetros, la suma de las tres cifras de cada fila (diámetro) sea igual a 15.

El tridente

En las casillas del tridente aquí representado (fig. 234) hay que escribir los números del 1 al 13 de tal manera, que la suma de las cifras en cada una de las tres columnas verticales (*I*, *II*, *III*) y en la fila horizontal (***IV***) sea la misma.

Procure hacerlo.

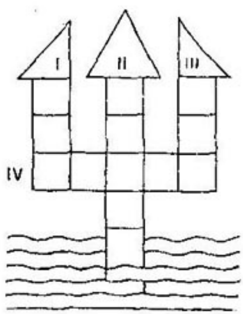


Figura 234

SOLUCIONES

Con siete cifras

Este problema tiene no una, sino tres soluciones distintas, a saber:

$$123+4-5-67=55;$$
$$1-2-3-4+56+7=55;$$
$$12-3+45-6+7=55$$

Nueve cifras

He aquí por qué procedimiento puede usted obtener 100 de una serie de nueve cifras y tres signos más y menos:

$$123-45-67+89=100$$

Esta es la única solución posible; ninguna otra combinación de las nueve cifras y de los signos más y menos, empleados *tres veces*, puede dar el resultado 100.

Lograr este mismo resultado utilizando los signos de sumar y restar menos de tres veces, es imposible.

Con diez cifras

Aquí tiene cuatro soluciones:

$$70+24\frac{9}{18}+5\frac{3}{6}=100;$$
$$80\frac{27}{54}+19\frac{3}{6}=100;$$
$$87+9\frac{4}{5}+3\frac{12}{60}=100;$$
$$50\frac{1}{2}+49\frac{38}{76}=100.$$

La unidad

Hay que representar la unidad como suma de dos quebrados;

$$\frac{148}{296}+\frac{35}{70}=1.$$

Los que sepan álgebra pueden dar otras soluciones, como, por ejemplo, $123\,456\,789^0$; $234\,567^{9-8-1}$, etc., ya que todo número elevado a la potencia cero es igual a la unidad.

Con cinco doses

El número 15 puede escribirse así:

$$(2+2)^2-\frac{2}{2}=15; \quad \frac{22}{2}+2\times2=15;$$
$$(2\times2)^2-\frac{2}{2}=15; \quad \frac{22}{2}+2^2=15;$$
$$2^{(2+2)}-\frac{2}{2}=15; \quad \frac{22}{2}+2+2=15.$$

Y el número 11, así:

$$\frac{22}{2}+2-2=11.$$

El número 12 321. A primera vista parece que es imposible escribir este número de cinco cifras con cinco números iguales. Sin embargo, el problema puede resolverse. La solución es:

$$\left(\frac{222}{2}\right)^2=111^2=111\times111=12\,321.$$

<u>Otra vez con cinco doses</u>

$$22+2+2+2=28.$$

<u>Con cuatro doses</u>

$$\frac{222}{2}=111.$$

<u>Con cinco treses</u>

He aquí la solución del problema

$$\frac{33}{3}-\frac{3}{3}=10.$$

Es interesante el hecho de que este problema se resolvería exactamente lo mismo, si el número 10 hubiera que expresarlo no con cinco treses, sino con cinco unidades, cinco cuatros, cinco sietes, cinco nueves y, en general, por cualesquiera cinco cifras iguales.

En efecto:

$$\frac{11}{1}-\frac{1}{1}=\frac{22}{2}-\frac{2}{2}=\frac{44}{4}-\frac{4}{4}=\frac{99}{9}-\frac{9}{9}\text{, etc.}$$

Existen otras formas de resolver este mismo problema:

$$\frac{3\times3\times3+3}{3}=10,$$

$$\frac{3^3}{3}+\frac{3}{3}=10.$$

<u>El número 37</u>

Hay dos soluciones:

$$33+3+\frac{3}{3}=37;$$

$$\frac{333}{3\times3}=37.$$

Por cuatro procedimientos

El número 100 puede expresarse por medio de cinco cifras iguales, utilizando para ello unos, treses y —lo que es aún más fácil— cincos:

$$111-11=100;$$

$$33\times 3+\frac{3}{3}=100;$$

$$5\times 5\times 5-5\times 5=100;$$

$$(5+5+5+5)\times 5=100.$$

Con cuatro treses

$$1=\frac{33}{33}\text{ (hay otros procedimientos)};$$

$$2=\frac{3}{3}+\frac{3}{3};$$

$$3=\frac{3+3+3}{3};$$

$$4=\frac{3\times 3+3}{3};$$

$$6=(3+3)\times\frac{3}{3}.$$

Sólo damos las soluciones hasta el número seis. Las demás piénselas usted mismo. Las soluciones indicadas también pueden componerse de otras combinaciones de treses.

Con cuatro cuatros

$$1=\frac{44}{44},\quad ó\quad \frac{4+4}{4+4},\quad ó\quad \frac{4\times 4}{4\times 4},\text{ etc.}$$

$$2=\frac{4}{4}+\frac{4}{4},\quad ó\quad \frac{4\times 4}{4+4};$$

$$3=\frac{4+4+4}{4},\quad ó\quad \frac{4\times 4-4}{4};$$

$$4=4+4\times(4-4);$$

$$5=\frac{4\times 4+4}{4};$$

$$6=\frac{4+4}{4}+4;$$

$$7=4+4-\frac{4}{4},\quad ó\quad \frac{44}{4}-4;$$

$$8=4+4+4-4,\quad ó\quad 4\times 4-4-4;$$

$$9=4+4+\frac{4}{4};$$

$$10=\frac{44-4}{4}.$$

Con cuatro cincos

Sólo existe un procedimiento:

$$\frac{55}{5}+5=16.$$

Con cinco nueves

Dos procedimientos son:

$$9+\frac{99}{99}=10,$$

$$\frac{99}{9}-\frac{9}{9}=10.$$

El que sepa álgebra puede añadir varias soluciones más, por ejemplo:

$$\left(9\frac{9}{9}\right)^{\frac{9}{9}}=10,$$

$$9+99^{9-9}=10.$$

Veinticuatro

Aquí tiene dos soluciones:

$$22+2=24; \quad 3^3-3=24.$$

Treinta

Damos tres soluciones:

$$6\times 6-6=30; \quad 3^3+3=30; \quad 33-3=30.$$

Mil

$$888+88+8+8+8=1000.$$

¿Cómo obtener veinte?

He aquí como hay que hacer esto (las cifras tachadas han sido sustituidas por ceros):

011
000
009

En efecto, $11+9=20$.

Tachar nueve cifras

Este problema admite varias soluciones. Damos cuatro ejemplos, sustituyendo por ceros las cifras tachadas:

100	111	011	101
000	030	330	303
005	000	000	000
007	070	770	707
999	900	000	000
1111	1111	1111	1111

En el espejo

Las únicas cifras que no se desfiguran en el espejo son 1, 0 y 8. Por lo tanto, el año que se busca sólo puede contener estas cifras. Sabemos además que se trata de uno de los años del siglo XIX, cuyas primeras dos cifras son 18.

Ahora ya es fácil comprender que este año es el 1818. En el espejo, el año 1818 se convertirá en 8181, que es exactamente $4^1/_2$ mayor que 1818:

$$1818 \times 4\frac{1}{2} = 8181.$$

Este problema no tiene más soluciones.

¿Que año?

En el siglo XX sólo hay un año de este tipo, el 1961.

¿Qué números?

La respuesta es fácil: 1 y 7. Otros números que den 7 no hay.

Sumar y multiplicar

Números de estos hay tantos como se quieran:

$$3 \times 1 = 3; \quad 3 + 1 = 4;$$
$$10 \times 1 = 10; \quad 10 + 1 = 11;$$

y, en general, toda pareja de números enteros en que uno de ellos sea la unidad.

Esto se debe a que sumándole una unidad, el número aumenta, mientras que si se multiplica por la unidad, el número no varía.

Lo mismo

Estos números son 2 y 2. Otros números enteros que tengan estas propiedades no existen.

Número par primo

Existe un número par primo, el 2. Este número sólo es divisible por sí mismo (y por la unidad).

Tres números

1, 2 y 3 dan el mismo resultado cuando se multiplican entre sí que cuando se suman:

$$1 + 2 + 3 = 6; \quad 1 \times 2 \times 3 = 6.$$

Suma y multiplicación

Existe una cantidad innumerable de pares de números de este tipo. He aquí varios ejemplos:

$$3 + 1\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}, \quad 3 \times 1\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}; \qquad 11 + 1{,}1 = 12{,}1, \quad 11 \times 1{,}1 = 12{,}1$$
$$5 + 1\frac{1}{4} = 6\frac{1}{4}, \quad 5 \times 1\frac{1}{4} = 6\frac{1}{4}; \qquad 21 + 1\frac{1}{20} = 22\frac{1}{20}; \quad 21 \times 1\frac{1}{20} = 22\frac{1}{20};$$
$$9 + 1\frac{1}{8} = 10\frac{1}{8}, \quad 9 \times 1\frac{1}{8} = 10\frac{1}{8}; \qquad 101 + 1{,}01 = 102{,}01, \quad 101 \times 1{,}01 = 102{,}01, \text{ etc.}$$

Multiplicación y división

Números así hay muchos. Por ejemplo:

$$2:1=2,\quad 2\times1=2;$$
$$7:1=7,\quad 7\times1=7;$$
$$43:1=43,\quad 43\times1=43;$$

Un número de dos cifras

El número buscado debe ser, evidentemente, un cuadrado exacto. Como entre los números de dos cifras sólo hay *seis* cuadrados, por medio de pruebas puede hallarse fácilmente la única solución, es decir, el número 81:

$$\frac{81}{8+1}=8+1.$$

Diez veces mayor

He aquí cuatro parejas de números de este tipo:

11 y 110; 14 y 35; 15 y 30; 20 y 20

En efecto:

$$11\times110=1210;\quad 11+110=121;$$
$$14\times35=490;\quad 14+35=49;$$
$$15\times30=450;\quad 15+30=45;$$
$$20\times20=400;\quad 20+20=40;$$

Este problema no tiene otras soluciones. Buscar las soluciones a ciegas es bastante embarazoso. Teniendo nociones de álgebra, el problema resulta más fácil y es posible no sólo buscar todas las soluciones, sino también cerciorarse de que no tiene más que cinco.

Con dos cifras

El número menor que puede escribirse con dos cifras no es 10, como pensarán posiblemente algunos lectores, sino la unidad expresada del modo siguiente:

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{3},\ \frac{4}{4}\ \text{y así sucesivamente hasta}\ \frac{9}{9}.$$

Los que saben álgebra añaden a estas expresiones una serie de otras:

$1^0, 2^0, 3^0, 4^0$ y así sucesivamente hasta 9^0,

porque todo número elevado a la potencia cero es igual a la unidad[1]).

El número mayor

Por lo general responden a esta pregunta escribiendo el número 1111. Pero este número dista mucho de ser el mayor. Mucho mayor —en 250 millones de veces— es 11^{11}.

Aunque representado nada más que por cuatro unidades, este número contiene, si se calcula, más de 285 millares de millones de unidades.

[1]) Pero serían erróneas las soluciones $\frac{0}{0}$ ó 0^0; estas expresiones carecen de sentido en general.

Quebrados singulares

El problema tiene varias soluciones. He aquí una de ellas:

$$\frac{1}{3}=\frac{5823}{17\,469};\quad \frac{1}{4}=\frac{3942}{15\,768};$$
$$\frac{1}{5}=\frac{2697}{13\,485};\quad \frac{1}{6}=\frac{2943}{17\,658};$$
$$\frac{1}{7}=\frac{2394}{16\,758};\quad \frac{1}{8}=\frac{3187}{25\,496};$$
$$\frac{1}{9}=\frac{6381}{57\,429}.$$

Existe un gran número de variantes; sobre todo puede representarse de muchas formas la fracción $\frac{1}{8}$ (¡por más de 40 procedimientos!).

¿Por cuánto multiplicó?

Razonaremos así. La cifra 6 se obtuvo de la suma de una columna de dos cifras, de las cuales, la inferior puede ser 0 ó 5. Pero si la inferior es 0, la superior tendrá que ser 6. ¿Puede ser 6 la cifra superior? Hagamos la prueba. Resulta que cualquiera que sea la segunda cifra del multiplicador, es imposible obtener 6 en el penúltimo lugar del primer producto parcial. Por lo tanto, la cifra inferior de la penúltima columna debe ser 5; y, en este caso, sobre ella se encuentra un **1**.

Ahora ya es fácil reconstruir parte de las cifras borradas:

```
   235
 ×  **
 -----
  **1*
+***5
 -----
 **56*
```

La última cifra del multiplicador debe ser mayor que 4, de lo contrario el primer producto parcial no tendría cuatro cifras. Esta cifra no puede ser 5 (porque con ella no se obtendría 1 en el penúltimo lugar). Veamos si sirve 6. Tenemos:

```
   235
 ×  *6
 -----
  1410
+***5
 -----
 **560
```

Razonando de igual modo en adelante, hallamos que el multiplicador es igual a 96.

¿Qué cifras faltan?

Las cifras que faltan se reponen gradualmente, si se razona como sigue.

Para mayor comodidad numeraremos las filas:

```
       *1*    I
     × 3*2    II
     -----
       *3*    III
     3*2*     IV
+   *2*5      V
   -------
   1*8*30     VI
```

Se comprende fácilmente que el último asterisco de la fila III es un 0, ya que 0 figura al final de la fila VI.

Ahora se determina el valor del último asterisco de la fila I: ésta es una cifra que multiplicada por 2 da un número que termina en cero, y multiplicada por 3, un número que termina en 5 (V fila). Por lo tanto, sólo puede ser 5.

No es difícil darse cuenta de que el asterisco de la fila II es un 8, porque sólo al multiplicarlo por 8, el número 15 da un resultado que termina en 20 (IV fila).

Finalmente, queda claro el valor del primer asterisco de la fila I: es la cifra 4, porque sólo el 4 multiplicado por 8 da un resultado que empieza en 3 (fila IV).

Hallar las demás cifras desconocidas no ofrece ya dificultad: basta multiplicar los números de las dos primeras filas, que ya están completamente determinados.

En fin de cuentas se obtiene el siguiente ejemplo de multiplicación:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}415\\382\end{array} \\ \hline 830 \\ +\,3320 \\ 1245 \\ \hline 158530 \end{array}$$

¿Qué números?

Razonando de un modo semejante a como se hizo en el ejemplo anterior, descubrimos los valores de los asteriscos en este caso.

Se obtiene:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}325\\147\end{array} \\ \hline 2275 \\ 1300 \\ +\,325 \\ \hline 47775 \end{array}$$

Casos raros de multiplicación

El lector que tenga paciencia puede encontrar nueve casos de multiplicación de este tipo, a saber:

$$\begin{array}{rcrcr}
12 & \times & 483 & = & 5796 \\
42 & \times & 138 & = & 5796 \\
18 & \times & 297 & = & 5346 \\
27 & \times & 198 & = & 5346 \\
39 & \times & 186 & = & 7254 \\
48 & \times & 159 & = & 7632 \\
28 & \times & 157 & = & 4396 \\
4 & \times & 1738 & = & 6952 \\
4 & \times & 1963 & = & 7852
\end{array}$$

Una división misteriosa

Para mayor comodidad numeraremos las filas de puntos según la posición dada.

```
      ........ | ...
  I  ....      |-----
     -------   | .....
 II   ....
III    ...
      -----
 IV     ...
  V     ...
      -----
 VI     ....
VII     ....
      -----
```

Observando la fila II llegamos a la conclusión de que la segunda cifra del cociente es 0, ya que fue necesario bajar, una detrás de otra, dos cifras del dividendo. Designemos todo el divisor por x. Las filas IV y V demuestran que el número $7x$ (producto de la penúltima cifra del cociente por el divisor) después de restarlo de un número que no supera a 999, dio un resto no menor que 100. Está claro que $7x$ no puede ser mayor que $999-100$, es decir, que 899, de donde x no es mayor que 128. Vemos después que el número de la fila III es mayor que 900, de lo contrario al restarlo de un número de cuatro cifras no daría un resto de dos cifras. Pero en este caso la tercera cifra del cociente deberá ser $900 : 128$, es decir, mayor que 7,03 y, por consiguiente, igual a 8 ó a 9. Como los números de las filas I y VII son de cuatro cifras, es evidente que la tercera cifra del cociente es 8 y la última, 9.

Con esto queda resuelto, en realidad, el problema, puesto que el resultado que se buscaba de la división (es decir, el cociente) lo hemos encontrado: 90 879.

No hay necesidad de seguir adelante y buscar el dividendo y el divisor. El problema sólo planteaba encontrar el *resultado* de la división, o sea, el cociente. El problema no exige descifrar todo lo escrito. Pero, además, existe no una, sino 11 parejas de números que satisfacen, al hacer la división, la disposición dada de los puntos y dan la cifra 7 en el cuarto lugar del cociente.

Estos números son:

$$\left.\begin{array}{r}
10\,360\,206 : 114 \\
10\,451\,085 : 115 \\
10\,541\,964 : 116 \\
10\,632\,843 : 117 \\
10\,723\,722 : 118 \\
10\,814\,601 : 119 \\
10\,905\,480 : 120 \\
10\,996\,359 : 121 \\
11\,087\,238 : 122 \\
11\,178\,117 : 123 \\
11\,268\,996 : 124
\end{array}\right\} = 90\,879$$

¿Qué se dividió?

El caso de división buscado es:

$$\begin{array}{r|l} 52650 & 325 \\ \cline{2-2} -325 & 162 \\ \cline{1-1} 2015 & \\ -1950 & \\ \cline{1-1} 650 & \\ -650 & \\ \cline{1-1} \end{array}$$

División por 11

Para poder resolver este problema hay que conocer la condición de divisibilidad por 11. Un número es divisible por 11 si la diferencia entre la suma de los valores absolutos de las cifras de lugar par y las de lugar impar es divisible por 11 o igual a cero.

Probemos, por ejemplo, el número 23 658 904.

La suma de las cifras de lugar par es:

$$3 + 5 + 9 + 4 = 21;$$

Y la suma de las cifras de lugar impar:

$$2 + 6 + 8 + 0 = 16.$$

Su diferencia (descontando la menor de la mayor) es igual a:

$$21 - 16 = 5.$$

Esta diferencia (5) no es divisible por 11; por lo tanto, el número que hemos tomado no puede dividirse por 11 sin que quede resto.

Ensayemos otro número, el 7 344 535:

$$\begin{aligned} 3 + 4 + 3 &= 10; \\ 7 + 4 + 5 + 5 &= 21; \\ 21 - 10 &= 11. \end{aligned}$$

Y como 11 es divisible por 11, el número ensayado también es múltiplo de 11.

Ahora es fácil comprender en qué orden hay que escribir las nueve cifras para obtener un número múltiplo de 11 que satisfaga las condiciones del problema.

Por ejemplo: 352 049 786

Hacemos la prueba:

$$\begin{aligned} 3 + 2 + 4 + 7 + 6 &= 22, \\ 5 + 0 + 9 + 8 &= 22. \end{aligned}$$

La diferencia $22 - 22 = 0$; por consiguiente, el número que hemos escrito es múltiplo de 11.

El mayor de todos los números de este tipo es: 987 652 413.

El menor: 102 347 586.

Triángulo numérico

La solución se muestra en la fig. 235. Las cifras medias de cada fila pueden permutarse y, de este modo, obtener una serie de soluciones más.

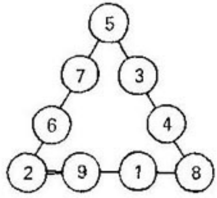


Figura 235

Otro triángulo numérico

La solución se da en la fig. 236. Las cifras medias de cada fila se pueden permutar y obtener así una serie de soluciones más.

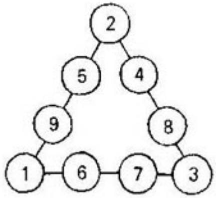


Figura 236

La estrella de ocho puntas

La solución puede verse en la fig. 237.

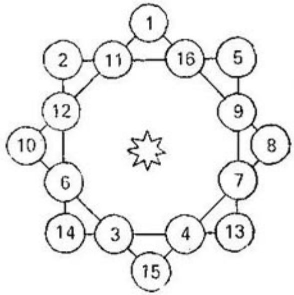


Figura 237

La estrella mágica

Para simplificar la búsqueda de la disposición que se requiere de los números, nos atendremos a las siguientes consideraciones.

La suma de los números que hay en las puntas de la estrella es igual a 26; y la de todos los números de la estrella, 78. Por lo tanto, la suma de los números del hexágono interior será $78 - 26 = 52$.

Consideremos ahora uno de los grandes triángulos. La suma de los números de cada uno de sus lados es igual a 26, y si sumamos los números de sus tres lados, obtenemos $26 \times 3 = 78$, con la particularidad de que cada uno de los números que hay en las puntas participa dos veces. Y como la suma de los números de los tres pares internos (es decir, del hexágono interior) debe, como sabemos, ser igual a 52, la suma duplicada de los números que hay en los vértices de cada triángulo será $78 - 52 = 26$; la suma simple será 13.

El campo de las búsquedas se ha reducido ya considerablemente. Sabemos, por ejemplo, que ni 12 ni 11 pueden ocupar las puntas de la estrella (¿por qué?). Por lo tanto, podemos empezar los ensayos a partir de 10, en este caso se determinan inmediatamente los dos números que deben ocupar los restantes vértices del triángulo. Estos números son 1 y 2.

Prosiguiendo por este camino, encontramos finalmente la disposición requerida. Esta disposición se muestra en la fig. 238.

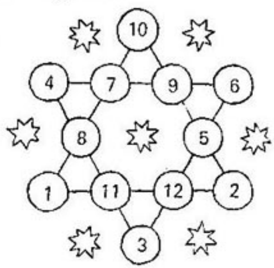


Figura 238

La rueda numérica

La solución se da en la fig. 239.

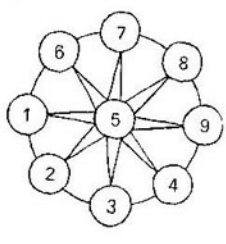


Figura 239

El tridente

He aquí la colocación que se exige de los números (fig. 240). La suma de los números en cada una de las tres columnas verticales y en la fila horizontal es igual a 25.

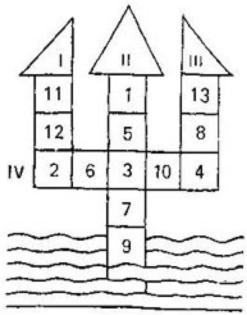


Figura 240

Una multiplicación fácil

Si no recuerda usted bien la tabla de multiplicar y tiene dudas cuando multiplica por 9, sus propios dedos le pueden ayudar.

Ponga las dos manos sobre la mesa: sus diez dedos le servirán de máquina calculadora.

Supongamos que hay que multiplicar 4 por 9.

El *cuarto* dedo da la respuesta: a su izquierda hay tres dedos, a su derecha, seis; lea usted: 36; es decir, $4 \times 9 = 36$.

Otros ejemplos: ¿cuántas son 7×9?

El *séptimo* dedo tiene a la izquierda seis dedos, y a la derecha, tres. La respuesta es 63.

¿Cuántas son 9×9? El *noveno* dedo tiene ocho dedos a su izquierda y uno a su derecha. La respuesta es 81.

Esta máquina de calcular animada le ayudará a recordar bien a qué es igual 6×9, y no confundir, como hacen algunos, 54 y 56. El *sexto* dedo tiene a la izquierda cinco dedos, y a la derecha, cuatro; por lo tanto, $6 \times 9 = 54$.

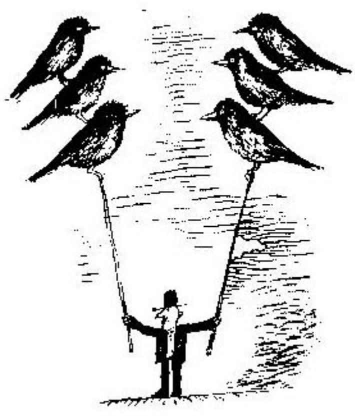


Figura 241

Las chovas y las estacas

(Problema popular)

**Llegaron las chovas
y se posaron en estacas.
Si en cada estaca
se posa una chova,
hay una chova
que se queda sin estaca.
Pero si en cada estaca
se posan dos chovas,
en una de las estacas
no habrá chova.
¿Cuántas eran las chovas?
y, ¿cuántas las estacas?**

Figura 242

Las hermanas y los hermanos

Yo tengo tantas hermanas como hermanos. Pero mi hermana tiene la mitad de hermanas que de hermanos. ¿Cuántos somos?

¿Cuántos hijos?

Yo tengo seis hijos. Cada hijo tiene una hermana. ¿Cuántos hijos tengo?

El desayuno

Dos padres y dos hijos se comieron en el desayuno tres huevos, con la particularidad de que cada uno se comió un huevo entero. ¿Cómo explica usted esto?

Tres cuartas partes de hombre

A un manijero le preguntaron cuántos hombres tenía su cuadrilla. El respondió de un modo bastante confuso:

—Los hombres no son muchos: tres cuartos de los que somos más tres cuartos de hombre, ésa es toda nuestra gente.

¿Podría usted adivinar cuántos hombres había en esta cuadrilla?

¿Cuántos años tienen?

Figura 243

—Dígame, usted, abuelo, ¿qué edad tiene su hijo?

—Tiene tantas semanas como mi nieto días.

—¿Y qué edad tiene su nieto?

—Tiene tantos meses como yo años.

—Entonces, ¿qué edad tiene usted?

—Los tres juntos tenemos exactamente 100 años. Ingéniate y sabrás qué edad tenemos cada uno.

¿Quién es mayor?

Dentro de dos años mi hijo será dos veces mayor que era hace dos años. Y mi hija será dentro de tres años tres veces mayor que era hace tres años.

¿Quién es mayor, el niño o la niña?

La edad de mi hijo

Mi hijo es ahora tres veces más joven que yo. Pero hace cinco años era cuatro veces más joven.

¿Cuántos años tiene?

¿Qué edad tiene?

A un aficionado a los acertijos le preguntaron cuántos años tenía. Su respuesta fue intrincada.

—Multipliquen por tres los años que yo tenga dentro de tres años y réstenle el triplo de los que tenía hace tres años y obtendrán precisamente los años que tengo.

¿Qué edad tiene ahora?

Tres hijas y dos hijos

Un tío fue a ver a sus dos sobrinos y tres sobrinas que ya hacía bastante tiempo que no veía.

Los primeros que salieron a su encuentro fueron el pequeño Volodia y su hermanita Zhenia, y el rapaz le dijo muy ufano que él era dos veces mayor que su hermana. Después llegó corriendo Nadia, y su padre le dijo al recién llegado que las dos niñas juntas eran dos veces mayores que el niño.

Cuando volvió de la escuela Aliosha, dijo el padre que los dos niños juntos tenían el doble de años que las dos niñas juntas.

La última en llegar fue Lida y, cuando vio a su tío exclamó:

—Tío, ha llegado usted precisamente el día de mi cumpleaños. Hoy he cumplido 21 años.

—Y sabes que —añadió el padre—, acabo de darme cuenta de que mis tres hijas juntas tienen el doble de años que mis dos hijos.

¿Cuántos años tenía cada hijo y cada hija?

Años de sindicato

Yendo en el tranvía tuve la ocasión de oír la siguiente conversación entre dos pasajeros.

—¿Entonces, tú llevas en el sindicato el doble de años que yo?

—Sí, el doble.

—Pues, yo recuerdo que en una ocasión me dijiste que llevabas el triple.

—En efecto. Eso fue hace dos años. Entonces llevaba el triple de años, pero ahora sólo el doble.

¿Cuántos años lleva cada uno en el sindicato?

¿Cuántas partidas?

Tres amigos jugaron a las damas. En total jugaron tres partidas. ¿Cuántas partidas jugó cada uno?

El caracol

Un caracol decidió subir a un árbol de 15 m de altura. Durante cada día tenía tiempo de subir 5 m; pero mientras dormía por la noche, bajaba 4 m.

¿Al cabo de cuántos días llegará a la cima del árbol?

Figura 244

A la ciudad

Un koljosiano[1]) fue a la ciudad. La primera mitad del camino fue en tren, 15 veces más de prisa que si hubiera ido andando. Pero la segunda mitad del camino tuvo que hacerla en una carreta de bueyes, dos veces más despacio que a pie.

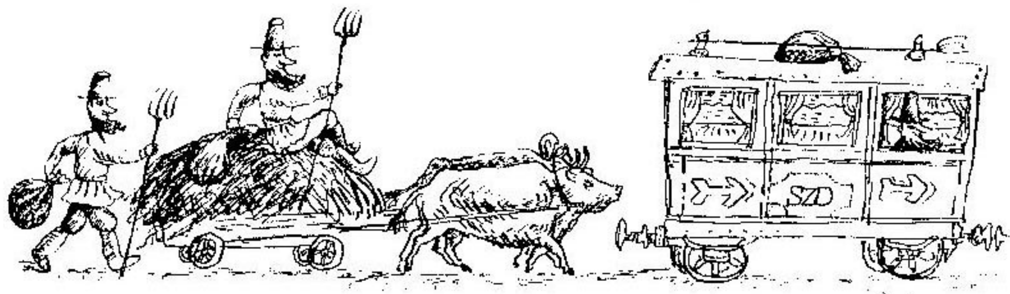


Figura 245

¿Cuánto tiempo ganó, sin embargo, en comparación con el caso en que hubiera ido todo el tiempo a pie?

Al koljós [2])

Desde la fábrica al koljós, la carretera no es lisa: primero va subiendo 8 km, y después baja una cuesta de 24 km. Mijáilov fue hacia allá en bicicleta y, sin detenerse, llegó al cabo de 2 horas y 50 minutos. El regreso también lo hizo en bicicleta, sin descansar, y tardó 4 horas y 30 minutos.

¿Podría usted decir a qué velocidad subía Mijáilov la cuesta y a qué velocidad la baja?

Dos escolares

—Dame una manzana y tendré el doble que tú —le dijo un escolar a otro.

—Eso sería injusto. Es preferible que tú me des a mí una manzana, y entonces tendremos las mismas —le respondió su camarada.

¿Podría usted decir cuántas manzanas tenía cada escolar?

El precio de la encuadernación

He aquí un problema que parece fácil, pero que al resolverlo son muchos los que se equivocan. Un libro

---

[1]) Campesino participante en una hacienda rural colectiva.
[2]) Hacienda rural colectiva.

encuadernado cuesta 2 rublos y 50 copeikas. El libro vale 2 rublos más que la encuadernación.

¿Cuánto cuesta la encuadernación?

El precio de la hebilla

Un cinturón con su hebilla vale 68 copeikas. La correa cuesta 60 copeikas más que la hebilla.

¿Cuánto vale la hebilla?

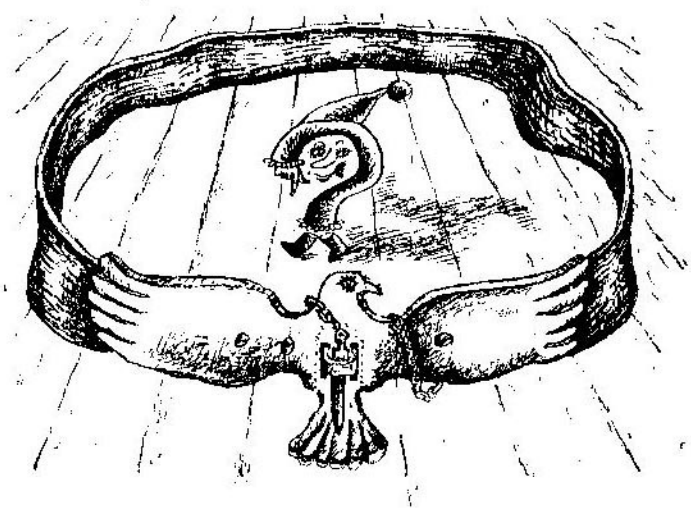


Figura 246

Los barriles de miel

En un almacén quedaban siete barriles llenos de miel, otros siete llenos de miel hasta la mitad, y siete vacíos. Todo esto fue comprado por tres cooperativas, que después tuvieron que repartirse los envases y la miel en partes iguales.

Se plantea la pregunta: ¿cómo hacer este reparto sin transvasar la miel de un barril a otro?

Si cree que esto puede hacerse por varios procedimientos, diga todos los procedimientos que haya ideado.

Los gatitos de Misha

Si Misha ve en cualquier parte un gatito abandonado, lo recoge y se lo lleva a su casa. Siempre tiene varios gatitos, pero procura no decirle a sus camaradas cuantos tiene, para que no se rían de él. Una vez le preguntaron:

—¿Cuántos gatos tienes ahora?

—Pocos —respondió—, tres cuartos de todos los que tengo y tres cuartos de gato, ésos son los que tengo en total.

Sus camaradas pensaron que Misha quería burlarse de ellos. Sin embargo, él les puso un problema fácil de resolver.

¡Resuélvalo!

Los sellos de correos

Un ciudadano compró 5 rublos de sellos de correos de tres valores distintos: de 50 copeikas, de 10 copeikas y de 1 copeika, en total 100 sellos.

¿Podría usted decir cuántos sellos compró de cada tipo?

¿Cuántas monedas?

A un ciudadano le devolvieron 4 rublos y 65 copeikas en rublos, monedas de diez copeikas (grívennik) y monedas de una copeika[1]). En total recibió 42 monedas.

¿Cuántas monedas le dieron de cada valor?

¿Cuántas soluciones tiene este problema?

Calcetines y guantes

En un cajón hay 10 pares de calcetines de color castaño obscuro y 10 pares de calcetines negros; en otro cajón hay 10 pares de guantes de color castaño obscuro y la misma cantidad de pares de guantes negros.

¿Cuántos calcetines y guantes será suficiente sacar de cada cajón, para que con ellos se pueda formar un par, cualquiera, de calcetines y un par de guantes?

«El gusanillo del libro»

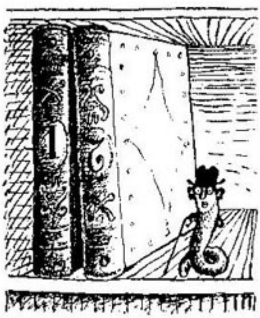


Figura 247

Hay insectos que roen los libros hoja por hoja y de este modo se abren paso a través de los tomos. Uno de estos «gusanillos de los libros», royendo, se abrió camino desde la primera página del primer tomo hasta la última del segundo tomo, que estaba al lado del primero, tal como se representa en la figura.

Cada tomo tiene 800 páginas.

¿Cuántas páginas royó el «gusanillo»?

Este problema no es difícil, pero tampoco tan fácil como usted, probablemente, cree.

1) La copeika es la centésima parte del **rublo.**

Las arañas y los escarabajos

Un pionero reunió en una caja arañas y escarabajos. En total ocho. Si se cuentan todas las patas de los bichos que hay en la caja resultan 54.

¿Cuántas arañas y cuántos escarabajos hay en la caja?

Los siete amigos

Un ciudadano tenía siete amigos. El primero venía a visitarlo cada tarde, el segundo, cada segunda tarde,

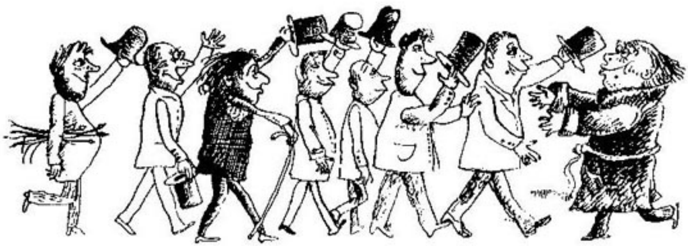


Figura 248

el tercero, cada tercer tarde, el cuarto, cada cuarta tarde y así sucesivamente hasta el séptimo, que venía cada séptima tarde.

¿Con cuánta frecuencia se encontraban los siete amigos y el anfitrión la misma tarde?

Continuación del anterior

Las tardes en que los siete amigos se reunían, el anfitrión los invitaba a beber vino y todos chocaban las copas entre sí por parejas.

Al hacer esto, ¿cuántas veces se oyen las copas chocar entre sí?

SOLUCIONES

Las chovas y las estacas

Este antiguo problema popular se resuelve así. Nos preguntamos: ¿cuántas chovas más habría que tener en el segundo caso que en el primero, para llenar todos los puestos en las estacas? Es fácil comprender que en el primer caso faltó sitio para una chova, mientras que en el segundo todas las chovas tenían puesto y aún faltaban dos chovas; por lo tanto, para ocupar todas las estacas, en el segundo caso, hubiera sido necesario tener $1 + 2$, es decir, tres chovas más que en el primero. Pero en cada estaca se posa una chova más. Luego está claro que las estacas eran tres. Si en cada una de estas estacas hacemos que se pose una chova y añadimos un ave más, obtenemos el número de pájaros: cuatro.

Así, pues, la solución del problema es: cuatro chovas y tres estacas.

Las hermanas y los hermanos

En total son siete: cuatro hermanos y tres hermanas. Cada hermano tiene tres hermanas y tres hermanos, y cada hermana, cuatro hermanos y dos hermanas.

¿Cuántos hijos?

En total son siete hijos: seis varones y una hembra. (De ordinario responden que los hijos son doce; pero en este caso cada hijo tendría seis hermanas, y no una).

El desayuno

La cuestión se explica fácilmente. A la mesa no se sentaron cuatro personas, sino solamente tres: el abuelo, su hijo y el nieto. Tanto el abuelo como su hijo son padres, y tanto el hijo como el nieto son hijos.

Tres cuartas partes de hombre

Sabemos que tres cuartas partes de la cuadrilla más tres cuartas partes de hombre constituyen la cuadrilla entera. Por lo tanto, estas tres cuartas partes de hombre es la cuarta parte que le falta a la cuadrilla. Después ya es fácil comprender que la brigada completa será cuatro veces mayor que tres cuartas partes de hombre. Pero tres cuartas partes tomadas cuatro veces (es decir, multiplicadas por cuatro) dan tres. Por consiguiente, en la cuadrilla había en total tres hombres.

¿Cuántos años tienen?

Calcular los años que tiene cada uno no es difícil. Está claro que el hijo es siete veces mayor que el nieto, y que el abuelo es 12 veces mayor. Si el niño tuviera un año, el hijo tendría 7 y el abuelo 12, y todos juntos, 20. Esto es exactatamente cinco veces menos de lo que ocurre en realidad. Por lo tanto, el nieto tiene cinco años, el hijo, 35 y el abuelo, 60. Hagamos la prueba: $5 + 35 + 60 = 100$.

¿Quién es mayor?

Mayor no es ninguno de los dos: son mellizos y en el momento dado tiene cada uno seis años. La edad se halla por medio de un simple cálculo: dentro de dos años el niño tendrá cuatro años más que hace dos años y será dos veces mayor que entonces; por lo tanto, cuatro años es la edad que tenía hace dos años, y ahora tiene $4 + 2 = 6$ años.

Esta misma es la edad de la niña.

La edad de mi hijo

Si el hijo es ahora tres veces más joven que el padre, éste será mayor que él en dos veces su edad. Cinco años antes el padre, claro está, también era mayor que el hijo en dos veces la edad *actual* de éste. Por otra parte, como el padre era entonces cuatro veca mayor que el hijo, quiere decir que era mayor que él en tres veces su edad *de entonces*. Por consiguiente, dos veces la edad *actual* del hijo es igual a tres veces su edad *anterior* o, lo que es lo mismo, el hijo es ahora $1^1/_2$ mayor de lo que era hace cinco años. De donde es fácil comprender que cinco años es la mitad de la edad anterior del hijo y, por lo tanto, hace cinco años éste tenía 10 años y ahora tiene 15 años.

Así, pues, el hijo tiene ahora 15 años, y el padre 45. En efecto, hace cinco años tenía el padre 40 años y el hijo, 10, es decir, era cuatro veces más joven.

¿Qué edad tiene?

La solución aritmética es bastante complicada, pero el problema se resuelve fácilmente si se recurre al álgebra y se plantea una ecuación. Llamemos x al número de años que buscamos. En este caso, la edad al cabo de tres años deberá designarse por $x + 3$, y la edad hace tres años, por $x - 3$. Tendremos la ecuación:

$$3\,(x + 3) - 3\,(x - 3) = x,$$

que una vez resulta da $x = 18$. El aficionado a los acertijos tiene ahora 18 años.

Hagamos la prueba: dentro de tres años tendrá 21 años; hace tres años tenía 15. La diferencia

$$3 \times 21 - 3 \times 15 = 63 - 45 = 18,$$

es decir, igual a la edad actual del aficionado a los acertijos.

Tres hijas y dos hijos

Sabemos que Volodia es dos veces mayor que Zhenia, y que Nadia y Zhenia juntos tienen el doble de años que Volodia. Por lo tanto, Nadia y Zhenia juntas tienen cuatro veces más años que Zhenia sola. De aquí se deduce directamente que *Nadia en tres veces mayor que Zhenia*.

Sabemos también que los años de Aliosha y Volodia suman el doble que los años de Nadia y Zhenia. Pero la edad de Volodia es doble que la de Zhenia, y Nadia y Zhenia juntas tienen cuatro veces más años que Zhenia sola. Por consiguiente, la suma de los años de Aliosha más el doble de los de Zhenia es igual a 8 veces la edad de Zhenia. Es decir, *Aliosha es seis veces mayor que Zhenia*.

Finalmente, sabemos que la suma de las edades de Lida, Nadia y Zhenia es igual a la de las edades de Volodia y Aliosha.

Ante la vista tenemos la siguiente tabla:

Lida — 21 años,
Nadia — tres veces mayor que Zhenia,
Volodia — dos veces mayor que Zhenia,
Aliosha — seis veces mayor que Zhenia,

podemos decir que la suma de 21 años más tres veces la edad de Zhenia, más la edad de Zhenia es igual a cuatro veces la edad de Zhenia más 12 veces la edad de Zhenia.

O sea: 21 años más cuatro veces la edad de Zhenia es igual a 16 veces la edad de Zhenia.

De aquí se deduce que 21 años es igual a 12 veces la edad de Zhenia y, por lo tanto, Zhenia tiene $\frac{21}{12} = 1\,^{3}/_{4}$ años.

Ahora ya es fácil determinar que Volodia tiene $3\,^{1}/_{2}$ años, Nadia, $5\,^{1}/_{4}$ y Aliosha, $10\,^{1}/_{2}$ años.

Años de sindicato

Uno lleva ocho años en el sindicato y el otro, cuatro años. Hace dos años el primero llevaba seis años y el segundo, dos, es decir, tres veces menos (el problema se resuelve fácilmente valiéndose de una ecuación).

¿Cuántas partidas?

De ordinario responden que cada uno jugó una partida, sin pararse a pensar que tres jugadores (lo mismo que cualquier otro número impar) no pueden jugar en modo alguno una partida solamente cada uno, porque, ¿con quién jugaría entonces el tercer jugador? En cada partida tienen que participar dos jugadores. Si jugaron A, B y C y fueron jugadas tres partidas, esto quiere decir que jugaron

A con B,
A con C,
B con C.

Se ve fácilmente que cada uno jugó no una, sino dos partidas:

A jugó con B y con C,
B jugó con A y con C,
C jugó con A y con B.

Así, pues, la respuesta correcta a este acertijo es: cada uno de los tres jugó dos veces, aunque sólo se jugaron tres partidas en total.

El caracol

Al cabo de 10 días (con sus noches) y un día más. Durante los primeros 10 días, el caracol sube 10 m (uno cada día), y durante el último día sube 5 m más, es decir, llega a la cima del árbol. (De ordinario responden erróneamente que «al cabo de 15 días»).

A la ciudad

El koljosiano no ganó nada, al contrario, perdió. En la segunda mitad del camino empleó tanto tiempo como hubiera tardado en hacer a pie todo el recorrido hasta la ciudad. Por lo tanto, no pudo ganar tiempo, sino que sólo pudo perderlo.

Perdió $^1/_{15}$ parte del tiempo necesario para recorrer a pie la mitad del camino.

Al koljós

La solución de este problema queda clara si se parte de los siguientes cómputos:

En 24 km subiendo cuesta y 8 km bajando cuesta tarda 4 horas y 30 minutos.

En 8 km subiendo cuesta y 24 km bajando cuesta tarda 2 horas y 50 minutos.

Multiplicando el segundo renglón por tres, tenemos que:

En 24 km subiendo cuesta y 72 km bajando cuesta tardaría 8 horas y 30 minutos.

De aquí se deduce claramente que 72 menos 8, es decir, 64 km bajando cuesta, los recorre el ciclista en 8 horas y 30 minutos menos 4 horas y 30 minutos, o sea, en 4 horas. Por consiguiente, en una hora recorrería $64 : 4 = 16$ km bajando cuesta.

De un modo semejante hallamos que subiendo cuesta recorría 6 km por hora. De la corrección de estas soluciones es fácil convencerse haciendo la prueba.

Dos escolares

Del hecho de que la entrega de una manzana iguale el número de las que tienen los dos escolares se deduce, que uno de ellos tiene dos manzanas más que el otro. Si del número menor se quita una manzana y se agrega al número mayor, la diferencia aumenta en dos más y se hace igual a cuatro. Pero sabemos que en este caso el número mayor será igual al duplo del menor. Por lo tanto, el número menor será entonces 4, y el mayor, 8.

Antes de la entrega de la manzana, uno de los escolares tenía $8 - 1 = 7$, y el otro $4 + 1 = 5$.

Comprobemos si estos números se igualan cuando del mayor se quita una manzana y se le agrega al menor:

$$7 - 1 = 6; \quad 5 + 1 = 6.$$

Así, pues, uno de los escolares tenía siete manzanas y el otro cinco.

El precio de la encuadernación

Por lo general responden sin pensar: la encuadernación cuesta 50 copeikas.

Pero en este caso el libro costaría 2 rublos, es decir, sólo sería 1 rublo y 50 copeikas más caro que a encuadernación.

La respuesta correcta es: el precio de la encuadernación es 25 copeikas, y el del libro, 2 rublos 25 copeikas; entonces el libro resulta exactamente 2 rublos más caro que la encuadernación.

El precio de la hebilla

Usted quizá haya pensado que la hebilla cuesta 8 copeikas. Si es así, se ha equivocado, porque en este caso la correa costaría no 60 copeikas más cara que la hebilla, sino sólo 52. La respuesta correcta es: la hebilla cuesta 4 copeikas; entonces la correa vale $68 - - 4 = 60$ copeikas, es decir, 60 copeikas más que la hebilla.

Los barriles de miel

Este problema se resuelve con bastante facilidad, si se considera que en los 21 barriles comprados había $7 + 3^1/_2$, es decir, $10^1/_2$ barriles de miel.

Por lo tanto, cada cooperativa debe recibir $3^1/_2$ barriles de miel y siete barriles vacíos.

El reparto puede hacerse de dos maneras. Por una de ellas las cooperativas reciben:

1ª cooperativa	3 b. llenos 1 b. medio lleno 3 b. vacíos	En total $3^1/_2$ barriles de miel
2ª cooperativa	2 b. llenos 3 b. medio llenos 2 b. vacíos	En total $3^1/_2$ barriles de miel
3ª cooperativa	2 b. llenos 3 b. medio llenos 3 b. vacíos	En total $3^1/_2$ barriles de miel

Por el otro procedimiento, las cooperativas reciben:

1ª cooperativa	3 b. llenos 1 b. medio lleno 3 b. vacíos	En total $3^1/_2$ barriles de miel
2ª cooperativa	3 b. llenos 1 b. medio lleno 3 b. vacíos	En total $3^1/_2$ barriles de miel
3ª cooperativa	1 b. lleno 5 b. medio llenos 1 b. vacío	En total $3^1/_2$ barriles de miel

Los gatitos de Misha

No es difícil comprender que $^3/_4$ partes de gato es la cuarta parte de todos los gatitos.

Por lo tanto, el total de los gatitos era cuatro veces mayor que $^3/_4$ partes, es decir, tres. En efecto, $^3/_4$ de tres es $2^1/_4$, y quedan $^3/_4$ partes de gato.

Los sellos de correos

Este problema tiene sólo una solución.

El ciudadano compró:

1 sello de a 50 copeikas
39 sellos de a 10 copeikas
60 sellos de a 1 copeika.

Efectivamente, los sellos eran en total $1 + 39 + 60 = 100$.
Y costaban $50 + 390 + 60 = 500$ copeikas.

¿Cuántas monedas?

El problema tiene cuatro soluciones, a saber:

	I procedimiento	II procedimiento	III procedimiento	IV procedimiento
Rublos	1	2	3	4
Monedas de 10 copeikas	36	25	14	3
Copeikas	5	15	25	35
Total de monedas	42	42	42	42

Calcetines y guantes

Bastarán tres calcetines, ya que dos de ellos serán siempre del mismo color. Con los guantes es más complicado el problema, ya que se diferencian entre sí no sólo por el color, sino también porque la mitad de ellos son para la mano derecha y la otra mitad, para la izquierda. Aquí bastarán sacar 21 guantes. Si se sacan menos, por ejemplo, 20, puede ocurrir que todos sean de la misma mano (10 castaños izquierdos y 10 negros izquierdos).

«El gusanillo de libro»

De ordinario responden que el «gusanillo» royó $800 + 800$ páginas y dos tapas de encuadernación. Pero esto no es cierto. Ponga juntos dos libros: uno al derecho y otro al reves, como muestra la fig. 247. Mire ahora cuántas páginas hay entre la primera del primer libro y la última del segundo.

Se convencerá de que entre ellas no hay *nada* más que las dos tapas.

«El gusanillo del libro» sólo estropeó, pues, las tapas de los libros, sin tocar sus hojas.

Las arañas y los escarabajos

Para resolver este problema hay que empezar recordando lo que dice la historia natural acerca de cuántas patas tienen los escarabajos y cuántas, las arañas: el escarabajo tiene seis patas y la araña, ocho.

Sabiendo esto, supongamos que en la caja sólo había ocho escarabajos. Entonces el número total de patas sería $6 \times 8 = 48$, es decir, seis menos de las que indica el problema. Probemos ahora a sustituir un escarabajo por una araña. Con esto el número de patas aumentará en dos, porque la araña tiene ocho patas, en vez de seis del escarabajo.

Está claro que si hacemos seis sustituciones como ésta, el número total de las patas que hay en la caja llegará a las 54 requeridas. Pero entonces sólo quedarán cinco de los ocho escarabajos, las demás serán arañas.

Así, pues, en la caja había cinco escarabajos y tres arañas.

Hagamos la prueba: los cinco escarabajos tienen 30 patas, y las tres arañas, 24, con lo que en total serán $30 + 24 = 54$ como exige la condición del problema.

El problema también se puede resolver de otro modo, a saber: puede suponerse que en la caja sólo había ocho arañas. Entonces el número total de patas resultaría ser $8 \times 8 = 64$, es decir, 10 veces más de las indicadas en la condición. Sustituyendo una araña por un escarabajo disminuiremos en dos el número de patas. Hay que hacer cinco sustituciones de este tipo para reducir el número de patas a las 54 que se requieren. En otras palabras, de las ocho arañas sólo hay que dejar tres y sustituir las demás por escarabajos.

Los siete amigos

No es difícil comprender que los siete amigos sólo podrían encontrarse juntos al cabo de un número de días divisible por 2, 3, 4, 5, 6 y 7. El menor de estos números es 420.

Por lo tanto, todos los amigos se reunían sólo una vez cada 420 días.

Continuación del anterior

Cada uno de los ocho asistentes (el antifitrión y sus siete amigos) choca su copa con los otros siete; por lo tanto, resultan $8 \times 7 = 56$ combinaciones de dos. Pero, al proceder así, cada pareja se cuenta dos veces (por ejemplo, el tercer huésped con el quinto y el quinto con el tercero se cuentan como si fueran parejas distintas). Por consiguiente, las copas sumarán $\frac{56}{2} = 28$ veces.

20

¿Sabe usted contar?

Esta pregunta puede parecer enojosa a toda persona de más de tres años de edad. ¿Quién no sabe contar? Para decir sucesivamente «uno», «dos», «tres», no hace falta mucha habilidad. Y, a pesar de todo, estoy seguro de que no siempre haría usted bien una cosa tan sencilla al parecer. Todo depende de lo que hay que contar. No es difícil contar los clavos que hay en un cajón. Pero supongamos que en este cajón no hay sólo clavos, sino clavos y tornillos mezclados y se desea saber cuántos clavos y cuántos tornillos hay. ¿Qué hará usted entonces? ¿Separará los clavos de los tornillos y los contará después independientemente?

Este mismo problema se le plantea al ama de casa cuando tiene que contar la ropa antes de darla a lavar. Ella separa la ropa por tipos: hace un montón con las camisas, otro con las toallas, un tercero con las fundas de las almohadas y así sucesivamente. Y sólo después de realizar este fastidioso trabajo empieza a contar las prendas que hay en cada montón.

¡Esto es no saber contar! Porque este procedimiento de contar objetos heterogéneos es bastante incómodo, complicado y a veces irrealizable. Cuando se trata de contar clavos o ropa, no está mal: se pueden agrupar en montones. Pero póngase en el caso de un silvicultor, que tiene que contar cuántos pinos, abetos, abedules y álamos crecen en una misma hectárea de terreno. En este caso es imposible agrupar previamente los árboles por tipos. ¿Va a contar primero los pinos, después, sólo abetos, luego, los abedules y, por fin, los álamos? ¿Recorrerá cuatro veces la parcela?

¿No existe, acaso, algún procedimiento más sencillo, que permita hacer esto recorriendo una *sola* vez la parcela? Sí, ese procedimiento existe y desde hace muchísimo tiempo lo emplean los silvicultores. Demostraré en qué consiste basándome en el ejemplo de los clavos y los tornillos.

Para contar de una sola vez cuántos clavos y cuántos tornillos hay en el cajón, sin separarlos previamente, coja un lapiz y una hoja de papel rayado así:

Clavos	Tornillos

Después, comience a contar. Saque de la caja lo primero que le venga a mano. Si es un clavo, haga una rayita en el papel, en la casilla de los clavos; si es un tornillo, haga la rayita en la casilla de los tornillos. Saque el segundo objeto y proceda del mismo modo. Coja el tercer objeto y así sucesivamente hasta que quede completamente vacío el cajón. Cuando termine de contar, en la casilla de los clavos del papel habrá tantas rayitas como clavos había en el cajón, y en la casilla de los tornillos, tantas rayitas como tornillos había. Sólo queda contar las rayitas trazadas en el papel.

La cuenta de las rayitas puede hacerse más sencilla y más rápida si en vez de ponerlas unas detrás de otras se agrupan de cinco en cinco, formando figuras como la representada en la fig. 249.

Figura 249

Estos cuadraditos conviene agruparlos formando parejas, es decir, después de las primeras diez rayitas, se pone la 11ª en una nueva columna; cuando en la segunda columna se completan dos cuadraditos, se

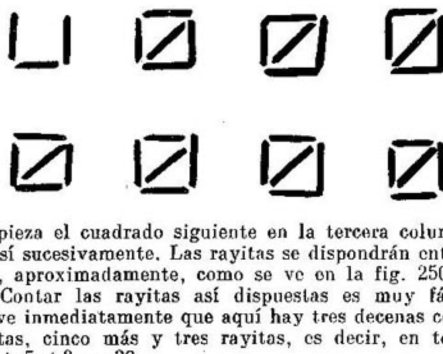


Figura 250

empieza el cuadrado siguiente en la tercera columna y así sucesivamente. Las rayitas se dispondrán entonces, aproximadamente, como se ve en la fig. 250.

Contar las rayitas así dispuestas es muy fácil: se ve inmediatamente que aquí hay tres decenas completas, cinco más y tres rayitas, es decir, en total $30 + 5 + 3 = 38$.

Pueden emplearse figuras de otro tipo; por ejemplo, suelen utilizarse símbolos en los que cada cuadradito significa 10 (fig. 251).

Figura 251

Cuando se cuentan los árboles de distintas especies que hay en una parcela de bosque, se procede idénticamente, pero en la hoja de papel habrá, en este caso, cuatro casillas en vez de dos.

Aquí es preferible que las casillas sean horizontales, y no verticales. Antes de empezar a contar, la hoja tendrá, por lo tanto, la forma siguiente:

Pinos	
Abetos	
Abedules	
Alamos	

Cuando se termina de contar, en el papel se tiene algo parecido a lo que se ve en la fig. 252.

Sacar el total es aquí muy sencillo:

Pinos 53
Abetos 79
Abedules . . . 46
Alamos 37

Este mismo procedimiento de cálculo lo utilizan los médicos para contar los glóbulos rojos y blancos que hay en la muestra de sangre que observan al microscopio.

Si necesita usted contar, por ejemplo, qué plantas hay y en qué cantidad crecen en una parcela pequeña de prado, ya sabe como resolver este problema en un plazo de tiempo mínimo. En la hoja de papel apunte previamente los nombres de las plantas que haya visto, dándole a cada una su casilla, y deje varias casillas libres de reserva para las plantas que puedan encontrarse inesperadamente. Empezará usted a contar

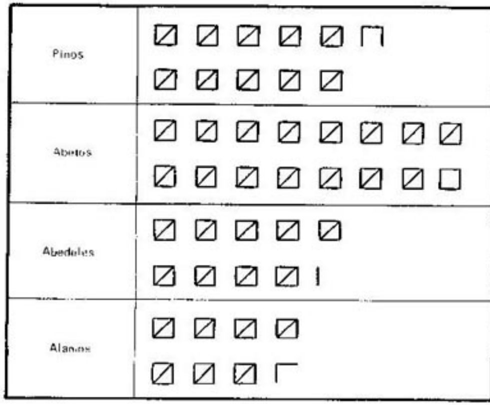


Figura 252

en una hoja de papel semejante a la que representa la fig. 252. Después hará lo mismo que en el caso de la parcela de bosque.

¿Para qué se cuentan los árboles que hay en un bosque?

A los habitantes de la ciudad les parece que esto es hasta imposible. En la novela de L. Tolstoi «Ana Karénina», el experto en agricultura, Levin, le pregunta a un pariente suyo, profano en esta materia, que quiere vender un bosque:

«—¿Has contado los árboles?

—¿Cómo que si he contado los árboles? —le responde sorprendido éste—. «Contar las arenas del mar o los rayos de los planetas, aunque grande fuera su talento...»

— Sí, pero el gran talento de Riabinin (el negociante, —*Y. P.*) puede contarlos. Y ningún mujik lo comprará sin antes contarlos».

Los árboles que hay en un bosque se cuentan para saber cuántos metros cúbicos de madera hay en él. No se cuentan todos los árboles del bosque, sino los de una parcela determinada —de un cuarto o un medio de hectárea—elegida de tal modo, que por la densidad, composición, grosor y altura de sus árboles pueda servir de término medio del bosque dado. Para hacer una elección acertada hay que tener, claro está, un ojo experto. Al hacer la cuenta no basta determinar el número de árboles de cada especie, sino que hay que saber también cuántos troncos hay de cada grosor: cuántos de 25 centímetros, de 30 centímetros, de 35 centímetros, etc. La relación que se hace tiene, por esta razón, no cuatro casillas, como en nuestro ejemplo simplificado, sino muchas más. Ahora puede figurarse usted la gran cantidad de veces que habría que recorrer el bosque, si los árboles se contaran como de ordinario, y no como hemos explicado aquí.

Como ve, contar sólo es fácil cuando se trata de objetos homogéneos. Pero cuando se quiere conocer el número de objetos heterogéneos, hay que recurrir a los procedimientos especiales, que hemos explicado ahora, cuya existencia ignoran muchos.

CALCULO RAPIDO

(Procedimientos fáciles de cálculo mental)

Aquí se han recogido algunos procedimientos de cálculo mental rápido, simples y fáciles de aprender. Los que utilicen estos procedimientos deben recordar que su dominio eficaz presupone no su aplicación mecánica, sino completamente consciente y, además, un entrenamiento más o menos prolongado. Pero una vez aprendidos los procedimientos que recomendamos, pueden hacerse cálculos mentales rápidos con la misma seguridad que se escribieran.

Multiplicación por un número dígito

§ 1. Para multiplicar mentalmente un número por un factor dígito (por ejemplo, 27×8), se opera empezando por multiplicar no las unidades, como en el cálculo escrito, sino las decenas del multiplicando ($20 \times 8 = 160$), después se multiplican las unidades ($7 \times 8 = 56$) y luego se suman ambos resultados ($160 + 56 = 216$).

Otros ejemplos:

$34 \times 7 = 30 \times 7 + 4 \times 7 = 210 + 28 = 238,$
$47 \times 6 = 40 \times 6 + 7 \times 6 = 240 + 42 = 282.$

§ 2. Conviene saber de memoria la tabla de multiplicar hasta 19×9:

	2	3	4	5	6	7	8	9
11	22	33	44	55	66	77	88	99
12	24	36	48	60	72	84	96	108
13	26	39	52	65	78	91	104	117
14	28	42	56	70	84	98	112	126
15	30	45	60	75	90	105	120	135
16	32	48	64	80	96	112	128	144
17	34	51	68	85	102	119	136	153
18	36	54	72	90	108	126	144	162
19	38	57	76	95	114	133	152	171

Sabiendo esta tabla se puede multiplicar mentalmente, por ejemplo, 147×8, así:

$$147 \times 8 = 140 \times 8 + 7 \times 8 = 1120 + 56 = 1176.$$

§ 3. Cuando uno de los números que se multiplica puede descomponerse en factores dígitos, resulta cómodo multiplicar sucesivamente por estos factores. Por ejemplo:

$$225 \times 6 = 225 \times 2 \times 3 = 450 \times 3 + 1350.$$

Multiplicación por un número de dos cifras

§ 4. La multiplicación por un número de dos cifras se procura simplificar para el cálculo mental reduciéndola a una multiplicación más habitual por un número dígito.

Cuando el multiplicando es dígito, se considera mentalmente que es multiplicador y las operaciones se hacen como se dijo en el § 1. Por ejemplo:

$$6 \times 28 = 28 \times 6 = 120 + 48 = 168.$$

§ 5. Si los dos factores tienen dos cifras, uno de ellos se descompone en decenas y unidades. Por ejemplo:

$$29 \times 12 = 29 \times 10 + 29 \times 2 = 290 + 58 = 348.$$
$$41 \times 16 = 41 \times 10 + 41 \times 6 = 419 + 246 = 656.$$
$$(\text{ó } 41 \times 16 = 16 \times 41 = 16 \times 40 + 16 - 640 + 16 - 656)$$

Resulta más conveniente descomponer en decenas y unidades el factor en que éstas vienen expresadas con números menores.

§ 6. Si el multiplicando o el multiplicador puede descomponerse mentalmente y con facilidad en números dígitos (por ejemplo, $14 = 2 \times 7$), se aprovecha esta circunstancia para disminuir uno de los factores, aumentando el otro las mismas veces (compárese con el § 3). Por ejemplo:

$$45 \times 14 = 90 \times 7 = 630.$$

Multiplicación y división por 4 y por 8

§ 7. Para multiplicar, mentalmente, un número por 4, se duplica dos veces. Por ejemplo:

$$112 \times 4 = 224 \times 2 = 448.$$
$$335 \times 4 = 670 \times 2 = 1340.$$

§ 8. Para multiplicar, mentalmente, un número por 8, se duplica tres veces. Por ejemplo:

$217 \times 8 = 434 \times 4 = 868 \times 2 = 1736.$

Otro procedimiento de multiplicar mentalmente por 8 consiste en añadirle un cero al multiplicando y restale el duplo de dicho multiplicando (es decir, en definitiva se multiplica por $10 - 2$):

$217 \times 8 = 2170 - 434 = 1736.$

Resulta aún más cómodo proceder así:

$217 \times 8 = 200 \times 8 + 17 \times 8 = 1600 + 136 = 1736.$

§ 9. Para dividir un número por 4 mentalmente, se divide dos veces por dos. Por ejemplo:

$76 : 4 = 38 : 2 = 19.$
$236 : 4 = 118 : 2 = 59.$

§ 10. Para dividir un número por 8 mentalmente, se divide tres veces por dos. Por ejemplo:

$464 : 9 = 232 : 4 = 116 : 2 = 58.$
$516 : 8 = 258 : 4 = 129 : 2 = 64^1/_2.$

Multiplicación por 5 y por 25

§ 11. Para multiplicar, mentalmente, un número por 5, se multiplica por $\frac{10}{2}$, es decir, se le añade al número un cero y se divide por dos. Por ejemplo:

$74 \times 5 = 740 : 2 = 370.$
$243 \times 5 = 2430 : 2 = 1215.$

Cuando el número que se multiplica por 5 es par, resulta más cómodo dividir primeramente por 2 y añadir después un cero a la cantidad obtenida. Por ejemplo:

$$74 \times 5 = \frac{74}{2} \times 10 = 370.$$

§ 12. Para multiplicar un número por 25 mentalmente, se multiplica por $\frac{100}{4}$, es decir, si el número es múltiplo de cuatro, se divide por 4 y al cociente se le añaden dos ceros. Por ejemplo:

$$72 \times 25 = \frac{72}{4} \times 100 = 1800.$$

Si al dividir el número por 4 queda resto,

cuando	el	resto	es	1	se	le	añade	al	cociente	25
»	»	»	»	2	»	»	»	»	»	50
»	»	»	»	3	»	»	»	»	»	75

La base en que funda este procedimiento queda aclarada por el hecho de que $100 : 4 = 25$; $200 : 4 = 50$; y $300 : 4 = 75$.

Multiplicación por $1^1/_2$, por $1^1/_4$, por $2^1/_2$ y por $^3/_4$

§ 13. Para multiplicar, mentalmente, un número por $1^1/_2$, se le añade al multiplicando su mitad. Por ejemplo:

$34 \times 1^1/_2 = 34 + 17 = 51.$
$22 \times 1^1/_2 = 23 + 11^1/_2 = 34^1/_2$ (ó 34,5).

§ 14. Para multiplicar, mentalmente, un número por $1^1/_4$, se le añade al multiplicando su cuarta parte. Por ejemplo:

$48 \times 1^1/_4 = 48 + 12 = 60.$
$58 \times 1/_4 \times 58 + 14^1/_2 = 72^1/_2$ (ó 72,5).

§ 15. Para multiplicar un número por $2^1/_2$ mentalmente, al número duplicado se la añade la mitad del multiplicando. Por ejemplo:

$18 \times 2^1/_2 = 36 + 9 = 45.$
$39 \times 2^1/_2 = 78 + 19^1/^2 = 97^1/_2$ (ó 97,5).

Otro procedimiento consiste en multiplicar por 5 y dividir por dos:

$18 \times 2^1/_2 = 90 : 2 = 45.$

§ 16. Para multiplicar un número por $^3/_4$ mentalmente (es decir, para hallar las $^3/_4$ partes de dicho número), se multiplica por $1^1/_2$ y se divide por dos. Por ejemplo:

$$30 \times \frac{3}{4} = \frac{30 + 15}{2} = 22\frac{1}{2} \text{ (ó 22,5).}$$

Una variante de este procedimiento consiste en que al multiplicando se le resta su cuarta parte o a la mitad del multiplicando se le añade la mitad de esta mitad.

Multiplicación por 15, por 125 y por 75

§ 17. La multiplicación por 15 se sustituye por la multiplicación por 10 y por $1^1/_2$ (porque $10 \times 1^1/_2 = 15$). Por ejemplo:

$18 \times 15 = 18 \times 1^1/_2 \times 10 = 270.$
$45 \times 15 + 450 = 225 = 675.$

§ 18. La multiplicación por 125 se sustituye por la multiplicación por 100 y por $1^1/_4$ (porque $100 \times \times 1^1/_4 = 125$). Por ejemplo:

$26 \times 125 = 26 \times 100 \times 1^1/_4 = 2600 + 650 = 3250.$

$$47 \times 125 = 47 \times 100 \times 1\ \frac{1}{4} = 4700 + \frac{4700}{4} = 4700 + 1175 = 5875.$$

§ 19. La multiplicación por 75 se sustituye por una multiplicación por 100 y por $^3/_4$ (porque $100 \times {}^3/_4 = = 75$). Por ejemplo:

$$18 \times 75 = 18 \times 100 \times \frac{3}{4} = 1800 \times \frac{3}{4} = \frac{1800 + 900}{2} = 1350$$

Observación: Algunos de los ejemplos citados también pueden resolverse fácilmente por el procedimiento del § 6:

$18 \times 15 = 90 \times 3 = 270.$
$26 \times 125 = 130 \times 25 = 3250.$

Multiplicación por 9 y por 11

§ 20. Para multiplicar, mentalmente, un número por 9, se le añade al número un cero y se le resta el multiplicando. Por ejemplo:

$62 \times 9 = 620 - 62 = 600 - 42 = 558.$
$73 \times 9 = 730 - 73 = 700 - 43 = 657.$

§ 21. Para multiplicar un número por 11 mentalmente, se le añade al número un cero y se le suma el multiplicando. Por ejemplo:
$87 \times 11 = 870 \times 87 = 957.$

División por 5, por $1^1/_2$ y por 15

§ 22. Para dividir, mentalmente, un número por 5, se separa con una coma la última cifra del duplo del número. Por ejemplo:

$$68 : 5 = \frac{136}{10} = 13{,}6.$$

$$237 : 5 = \frac{474}{10} = 47{,}4.$$

§ 23. Para dividir un número por $1^1/_2$ mentalmente, se divide por 3 el duplo del número. Por ejemplo:

$36 : 1^1/_2 = 72 : 3 = 24.$
$53 : 1^1/_2 = 106 : 3 = 35^1/_3.$

§ 24. Para dividir un número por 15 mentalmente, se divide por 30 el duplo de dicho número. Por ejemplo:

$240 : 15 = 480 : 30 = 48 : 3 = 16.$
$462 : 15 = 924 : 30 = 30^{24}/_{30} = 30^4/_5 = 30{,}8.$
(ó $924 : 30 — 308 : 10 = 30{,}8$).

Elevación al cuadrado

§ 25. Para elevar al cuadrado un número terminado en 5 (por ejemplo, 85) se multiplica el número de decenas (8) por sí mismo más una unidad ($8 \times 9 = 72$) y se le añade 25 (en nuestro ejemplo se obtiene 7225). Otros ejemplos:

25^2; $2 \times 3 = 6$; 625.
45^2; $4 \times 5 = 20$; 2025.
145^2; $14 \times 15 = 210$; 21025;

Este procedimiento se deduce de la fórmula

$$(10x + 5)^2 = 100x^2 + 100x + 25 = 100x(x + 1) + 25.$$

§ 26. El procedimiento que hemos indicado puede aplicarse también a las fracciones decimales que terminan en la cifra 5:

$8{,}5^2 = 72{,}25$; $14{,}5^2 = 210{,}25$;
$0{,}35^2 = 0{,}1225$; etc.

§ 27. Como $0{,}5 = {}^1/_2$ y $0{,}25 = {}^1/_4$, el procedimiento del § 25 puede utilizarse también para elevar al cuadrado los números que terminan en la fracción ${}^1/_2$:

$(8^1/_2)^2 = 72^1/_4.$
$(14^1/_2)^2 = 210^1/_4$, etc,

§ 28. Cuando la elevación al cuadrado se hace mentalmente, suele ser cómodo utilizar la fórmula:

$$(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2\ ab.$$

Por ejemplo:

$41^2 = 40^2 + 1 + 2 \times 40 = 1601 + 80 = 1681.$
$69^2 = 70^2 + 1 - 2 \times 70 = 4901 - 140 = 4761.$
$36^2 = (35 + 1)^2 = 1225 + 1 + 2 \times 35 = 1296.$

Este procedimiento resulta cómodo cuando los números terminan en 1, 4, 6 y 9.

Cálculos por la fórmula
$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

§ 29. Supongamos que hay que hacer mentalmente la multiplicación 52×48.

Nos figuramos estos factores en la forma $(50 + + 2) \times (50 - 2)$ y aplicamos la fórmula que figura en el encabezamiento:

$$50+2) \times (50-2) = 50^2 - 2^2 = 2496.$$

De un modo semejante se procede en general en todos los casos en que uno de los factores resulta cómodo representarlo en forma de suma de dos números, y el otro, en forma de diferencia de estos mismos números.

$$69 \times 71 = (70-1) \times (70+1) = 4899.$$
$$33 \times 27 = (30+3) \times (30-3) = 891.$$
$$53 \times 57 = (55-2) \times (55+2) = 3021.$$
$$84 \times 86 = (85-1) \times (85+1) = 7224.$$

§ 30. Este mismo procedimiento puede utilizarse también eficazmente para los cálculos del tipo siguiente:

$$7^1/_2 \times 6^1/_2 = (7 + {}^1/_2) \times (7 - {}^1/_2) = 48^3/_4.$$
$$11^3/_4 \times 12^1/_4 = (12 - {}^1/_2) \times (12 + {}^1/_4) = 143^{15}/_{16}.$$

Convieno recordar que $37 \times 3 = 111$

Recordando esto es fácil multiplicar mentalmente el número 37 por 6, 9, 12, etc.

$$37 \times 6 = 37 \times 3 \times 2 = 222.$$
$$37 \times 9 = 37 \times 3 \times 3 = 333.$$
$$37 \times 12 = 37 \times 3 \times 4 = 444.$$
$$37 \times 15 = 37 \times 3 \times 4 = 555, \text{ etc,}$$

Conviene recordar que $7 \times 11 \times 13 = 1001$

Recordando esto es fácil practicar mentalmente multiplicaciones del tipo

$77 \times 13 = 1001.$	$91 \times 11 = 1001.$	$143 \times 7 = 1001.$
$77 \times 26 = 2002.$	$91 \times 22 = 2002.$	$143 \times 14 = 2002.$
$77 \times 39 = 3003,$	$91 \times 33 = 3003,$	$143 \times 21 = 3003,$
etc.	etc,	etc.

Aquí sólo se ha hecho mención de los procedimientos mentales más fáciles y de uso más frecuente de multiplicación, división y elevación al cuadrado. Al practicarlos, el lector reflexivo ideará para si toda una serie de otros procedimientos que facilitan el trabajo de cálculo.

22

El cuadrado mágico más pequeño

La composición de cuadrados mágicos es un entretenimiento matemático muy antiguo y aún hoy muy extendido. El problema consiste en buscar una disposición tal de los números sucesivos (empezando por el 1), en las casillas de un cuadrado cuadriculado, que las sumas de los números en todas las filas y columnas y siguiendo las dos diagonales del cuadrado sean iguales.

El cuadrado mágico más pequeño es el de 9 casillas; es fácil convencerse, haciendo la prueba, de que es imposible la existencia de un cuadrado mágico de cuatro casillas. He aquí una muestra de cuadrado mágico de 9 casillas:

4	3	8
9	5	1
2	7	6

Figura 253

Si sumamos en este cuadrado los números $4 + 3 + 8$, ó $2 + 7 + 6$, ó $3 + 5 + 7$, ó $4 + 5 + 6$, o cualquier otra fila, columna o diagonal, en todos los casos obtendremos la misma suma, 15. Este resultado puede preverse antes de componer el propio cuadrado, porque las tres filas del cuadrado, la superior, la de en medio y la inferior, deben contener todos sus 9 números, que en conjunto dan la suma:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45.$$

Por otra parte, esta suma deberá ser igual, evidentemente, al triplo de la suma de una fila. De aquí se deduce que cada fila debe sumar:

$$45 : 3 = 15.$$

De un modo semejante se puede determinar a priori la suma de los números de una fila o columna de cualquier cuadrado mágico, cualquiera que sea el número de casillas de que conste. Para esto hay que dividir la suma de todos los números del cuadrado por el número de sus filas.

Rotaciones y reflexiones

Una vez compuesto un cuadrado mágico, es fácil obtener sus variantes, es decir, hallar una serie de nuevos cuadrados mágicos. Por ejemplo, si se ha compuesto el cuadrado de la fig. 254, haciéndolo girar mentalmente un cuarto de vuelta completa (es decir, 90°), se obtiene otro cuadrado mágico (fig. 255):

6	1	8
7	5	3
2	9	4

Figura 254

8	3	4
1	5	9
6	7	2

Figura 255

Los sucesivos giros, de 180° (media vuelta completa) y de 270° (tres cuartos de vuelta completa), dan otras dos variantes del cuadrado inicial.

Cada uno de los nuevos cuadrados mágicos obtenidos puede a su vez modificarse, si nos lo figuramos como si viéramos su imagen reflejada en un espejo. En la fig. 256 se muestra el cuadrado inicial y una de sus imágenes especulares.

6	1	8
7	5	3
2	9	4

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Figura 256

Sometiendo un cuadrado de 9 casillas a todas las rotaciones y reflexiones, obtenemos las siguientes modificaciones o variantes suyas (fig. 257):

6	1	8
7	5	3
2	9	4

1

8	1	6
3	5	7
4	9	2

2

2	7	6
9	5	1
4	3	8

3

Figura 257 (1—3)

6	7	2
1	5	9
8	3	4

4

4	9	2
3	5	7
8	1	6

5

2	9	4
7	5	3
6	1	8

6

8	3	4
1	5	9
6	7	2

7

4	3	8
9	5	1
2	7	6

8

Figura 257 (4—8)

Esta es la colección completa de todos los cuadrados mágicos que pueden formarse con los nueve primeros números.

El procedimiento de Bachet

Vamos a dar a conocer un viejo procedimiento de componer cuadrados mágicos *impares*, es decir, cuadrados con cualquier número impar de casillas: 3×3; 5×5; 7×7, etc. Este procedimiento fue propuesto en el siglo XVII por el matemático francés Bachet. Como el procedimiento de Bachet sirve, entre otras cosas, para el cuadrado de 9 casillas, resulta conveniente empezar su descripción por este ejemplo, por ser más simple. Así, pues, comenzamos a componer el cuadrado mágico de 9 casillas por el procedimiento de Bachet.

Después de dibujar un cuadrado cuadriculado en nueve casillas, escribimos en orden creciente los números del 1 al 9, disponiéndolos en filas oblicuas, a tres en cada fila, como puede verse en la fig. 258.

Los números que quedan fuera del cuadrado, los escribimos dentro de él, de forma que pasen a los

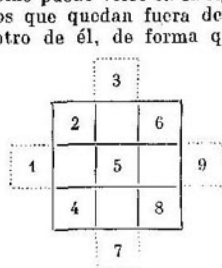


Figura 258

lados opuestos del cuadrado (pero permaneciendo en las mismas columnas o filas en que estaban). Como resultado obtenemos el cuadrado:

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Figura 259

Apliquemos la regla de Bachet a la composición de un cuadrado de 5×5 casillas. Empezaremos por la disposición:

				5				
			4		10			
		3		9		15		
	2		8		14		20	
1		7		13		19		25
	6		12		18		24	
		11		17		23		
			16		22			
				21				

Figura 260

Queda sólamente poner dentro del cuadrado los números que han quedado fuera de su marco. Para esto hay que desplazar mentalmente las figuras for-

3	16	9	22	15
20	8	21	14	2
7	25	13	1	19
24	12	5	18	6
11	4	17	10	23

Figura 261

madas por los números que están fuera del cuadrado («terrazas»), de modo que pasen a ocupar dentro de éste los lados *opuestos*. De esta manera se obtiene un cuadrado mágico de 25 casillas (fig. 261).

La base de este procedimiento tan sencillo es bastante complicada, pero los lectores pueden convencerse en la práctica de que el procedimiento es correcto.

Después de componer un cuadrado mágico de 25 casillas, por medio de rotaciones y reflexiones puede usted obtener todas sus modificaciones.

El procedimiento hindú

El procedimiento de Bachet o, como también se llama el «procedimiento de las terrazas», no es el único para componer cuadrados con número impar de casillas. De los otros procedimientos que existen, es relativamente fácil uno muy antiguo ideado, al parecer, en la India antes de nuestra era. Este procedimiento puede resumirse en seis reglas. Lea usted atentamente todas estas reglas y fíjese después en cómo se aplican en el ejemplo de cuadrado mágico de 49 casillas representado en la fig. 262.

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

Figura 262

1. En la mitad de la fila superior se escribe la cifra 1, y en la casilla más baja de la columna inmediata de la derecha, la cifra 2.

2. Los números siguientes se escriben por orden en dirección diagonal hacia arriba.

3. Cuando se llega hasta el borde derecho del cuadrado, se pasa a la casilla extrema izquierda de la fila inmediata superior.

4. Cuando se llega hasta el borde superior del cuadrado, se pasa a la casilla más baja de la columna inmediata de la derecha.

Observación. Cuando se llega hasta la casilla del ángulo superior derecho, se pasa al izquierdo inferior.

5. Cuando se llega a una casilla que ya está ocupada, se pasa a la casilla que se encuentra inmediatamente debajo de la última casilla llenada.

6. Si la última casilla llenada se encuentra en la fila inferior del cuadrado, se pasa a la casilla más alta de la misma columna.

Guiándose por estas reglas se pueden componer rápidamente cuadrados mágicos con cualquier número impar de casillas.

Si el número de casillas del cuadrado *no es divisible* por 3, la composición del cuadrado mágico puede comenzarse no por la regla 1, sino por otra regla.

La unidad puede escribirse en cualquier casilla de la fila diagonal que va desde la casilla central de la columna extrema izquierda a la casilla central de la fila más alta del cuadrado. Todos los números siguientes se escriben de acuerdo con las reglas 2—5.

Esto da la posibilidad de componer por el procedimiento hindú no un cuadrado, sino varios. Como ejemplo damos el siguiente cuadrado mágico de 49 casillas (fig. 263).

32	41	43	3	12	21	23
40	49	2	11	20	22	31
48	1	10	19	28	30	39
7	9	18	27	29	38	47
8	17	26	35	37	46	6
16	25	34	36	45	5	14
24	33	42	44	4	13	15

Figura 263

Ejercicio. Componga por el sistema hindú varios cuadrados mágicos de 25 y 49 casillas. Con los cuadrados obtenidos componga varios más por medio de rotaciones y reflexiones.

Cuadrados con número par de casillas

Para componer los cuadrados mágicos con número par de casillas aún no se ha hallado una regla general y cómoda. Sólo existe un procedimiento relativamente fácil para aquellos cuadrados pares cuyo número de casillas es divisible por 16; el número de casillas de los lados de estos cuadrados es divisible por 4, es decir, sus lados constan de 4, 8, 12, etc., casillas.

Convengamos en qué casillas vamos a llamar «opuestas» entre sí. En la fig. 264 se muestran dos pares de casillas opuestas, que pueden servir de ejemplo: un par se señala con crucecitas y otro con circulitos.

			×		
o					
					o
		×			

Figura 264

Vemos que si una casilla se encuentra en el cuarto puesto por la izquierda, de la segunda fila por arriba, la casilla opuesta a ella se encontrará en el cuarto puesto *por la derecha* de la segunda fila *por abajo*. (Al lector le conviene entrenarse hallando varios pares más de casillas opuestas). Advertimos que para las casillas tomadas en una fila diagonal, las casillas opuestas se encuentran en esta misma diagonal.

El procedimiento de componer cuadrados con el número indicado de casillas por lado lo explicaremos poniendo como ejemplo el cuadrado de 8 × 8 casillas. Se empieza por escribir ordenadamente en las casillas todos los números del 1 al 64 (fig. 265).

En el cuadrado obtenido, las filas diagonales dan la misma suma, 260, que es precisamente la que debe dar el cuadrado mágico de 8 × 8 casillas. (Compruebe esto). Pero las filas y las columnas de este cuadrado dan otras sumas. Así, la primera fila por arriba da

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Figura 265

en total 36, es decir, 224 menos de lo necesario (260 — — 36); la fila octava, es decir, la más baja, da como suma 484, o sea, 224 más de lo necesario (484 — 260). Teniendo en cuenta que cada número de la octava fila es 56 unidades mayor que el que se halla sobre él en la primera fila y que $224 = 4 \times 56$, llegamos a la conclusión de que las sumas de estas filas pueden igualarse si la mitad de los números de la primera fila intercambian sus puestos con los números que se encuentran debajo de ellos en la octava fila; por ejemplo, los números 1, 2, 3, 4 intercambian sus puestos con los números 57, 58, 59 y 60.

Lo dicho acerca de las filas primera y octava es cierto también para las filas segunda y séptima, tercera y sexta y, en general, para cada par de filas equidistantes de las filas extremas. Haciendo el intercambio de números en todas las filas, se obtiene un cuadrado cuyas filas dan sumas iguales.

Pero es necesario que las columnas también den la misma suma. En la disposición inicial de los números podríamos haber logrado esto haciendo un intercambio de números semejante al que acabamos de hacer con los números de las filas. Pero ahora, después de las permutaciones hechas en las filas, el problema se complica. Para hallar rápidamente los números que hay que intercambiar, existe el siguiente procedimiento, que puede utilizarse desde el principio: en vez de las permutaciones —en las filas y en las columnas—, intercambian sus puestos los números opuestos entre sí (en la pág. 337 se explicó qué números se llaman opuestos). Sin embargo, esta regla es insuficiente, ya que hemos establecido que deben intercambiarse no todos los números de la fila, sino únicamente la *mitad*; los demás números continúan en sus puestos. Pero, ¿qué pares de números opuestos son los que hay que intercambiar?

A esta pregunta responden las cuatro reglas siguientes:

1. El cuadrado mágico debe dividirse en cuatro cuadrados, como muestra la fig. 266.

1×	2	3	4×	5×	6	7	8×
9×	10×	11	12	13	14	15×	16×
17	18×	19×	20	21	22×	23×	24
25	26	27×	28×	29×	30×	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Figura **266**

2. En el cuadrado superior de la izquierda se señalan con crucecitas la mitad de todas las casillas, de manera que en cada columna y en cada fila de este cuadrado resulte señalada exactamente la mitad de las casillas que figuran en ella. Esto puede hacerse por diversos procedimientos, por ejemplo, como se ve en la fig. 266.

3. En el cuadrado superior de la derecha se señalan con crucecitas las casillas *simétricas* a las que se señalaron en el cuadrado superior de la izquierda.

4. Ahora no queda más que intercambiar los números que se encuentran en las casillas señaladas, con los números que se hallan en las casillas opuestas.

Como resultado de todas las permutaciones realizadas se obtiene el cuadrado mágico de 64 casillas que se representa en la fig. 267.

Pero en el cuadrado superior de la izquierda podríamos haber marcado las casillas de muchas maneras distintas, sin infringir la regla 2.

64	2	3	61	60	6	7	57
56	55	11	12	13	14	50	59
17	47	46	20	21	43	42	24
25	26	38	37	36	35	31	32
33	34	30	29	28	27	39	40
41	23	22	44	45	19	18	48
16	15	51	52	53	54	10	9
8	58	59	5	4	62	63	1

Figura 267

Esto puede hacerse, por ejemplo, como muestran los dibujos de la fig. 268.

El lector hallará, indudablemente, otras muchas formas de distribuir las crucecitas en las casillas del cuadrado superior de la izquierda.

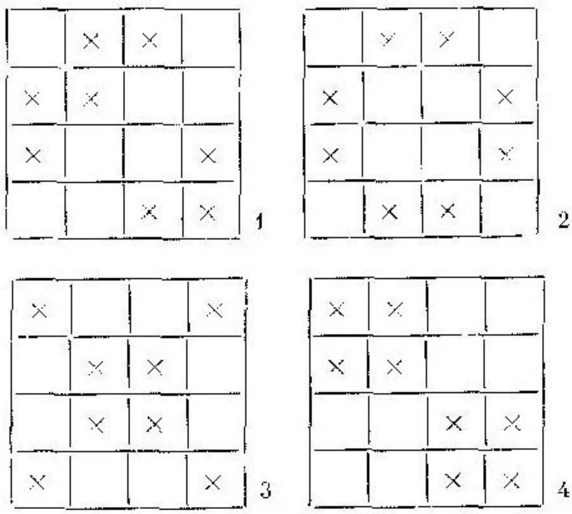


Figura 268

Aplicando después las reglas 3 y 4, pueden obtenerse varios cuadrados mágicos más, de 64 casillas.

Por este mismo procedimiento pueden construirse cuadrados mágicos de 12×12, 16×16, etc., casillas.

Proponemos al lector que haga esto por sí mismo.

Por qué se llaman así los cuadrados mágicos

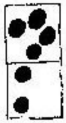
La primera mención acerca de un cuadrado mágico se encuentra en un antiguo libro oriental que data de los años 4000—5000 antes de nuestra era.

Los cuadrados mágicos eran más conocidos en la antigua India. La afición a los cuadrados mágicos pasó de la India a los pueblos árabes, los cuales atribuían a estas combinaciones numéricas propiedades misteriosas.

En Europa occidental los cuadrados mágicos eran en la edad media patrimonio de los representantes de las seudociencias, los alquimistas y los astrólogos. De las viejas ideas supersticiosas es de donde estos cuadrados numéricos recibieron su denominación de «mágicos» —es decir, pertenecientes a la magia—, tan extraña a las matemáticas. Los astrólogos y los alquimistas creían que una tablilla con la representación de un cuadrado mágico era capaz de salvar de la desgracia a la persona que la llevaba como talismán.

La composición de los cuadrados mágicos no es sólo una distracción. Su teoría fue elaborada por muchos matemáticos eminentes.

Esta teoría encuentra aplicación en ciertos problemas matemáticos importantes. Así, por ejemplo, existe un procedimiento de resolución de sistemas de ecuaciones con muchas incógnitas que utiliza las deducciones de la teoría de los cuadrades mágicos.

23 

El dominó

Una cadena de 28 fichas

¿Por qué las 28 fichas del dominó se pueden colocar, cumpliendo las reglas del juego, en una cadena continua?

El principio y el fin de la cadena

Cuando las 28 fichas del dominó se colocaron formando cadena, en uno de los extremos de ésta resultó haber 5 puntos.

¿Cuántos puntos había en el otro extremo?

Un truco con el dominó

Un camarada suyo coge una de las fichas del dominó y le propone a usted que, con las 27 restantes, forme una cadena continua, afirmando que esto siempre es posible, cualquiera que sea la ficha quitada. El se va a otra habitación para no ver la cadena que usted hace.

Usted empieza su tarea y se convence de que el camarada tenía razón: con las 27 fichas puede formar una cadena. Pero su sorpresa es aún mayor cuando su camarada, sin salir de la habitación contigua y sin ver la cadena que usted ha hecho, le dice desde allí el número de puntos que hay en sus extremos.

¿Cómo puede saberlo? Y, ¿por qué está seguro de que con 27 fichas cualesquiera del dominó se puede formar una cadena continua?

El cuadrado

La fig. 269 representa un cuadrado formado con las fichas del dominó, cumpliendo las reglas del juego. Los lados de este cuadrado tienen la misma longitud, pero las sumas de los puntos que hay en ellos son distintos: la fila superior y la columna de la izquierda contienen cada una 44 puntos, las otras dos, una 59 y la otra 32.

¿Podría usted hacer un cuadrado de este tipo en el cual todos los lados contengan igual número de puntos, es decir, 44?

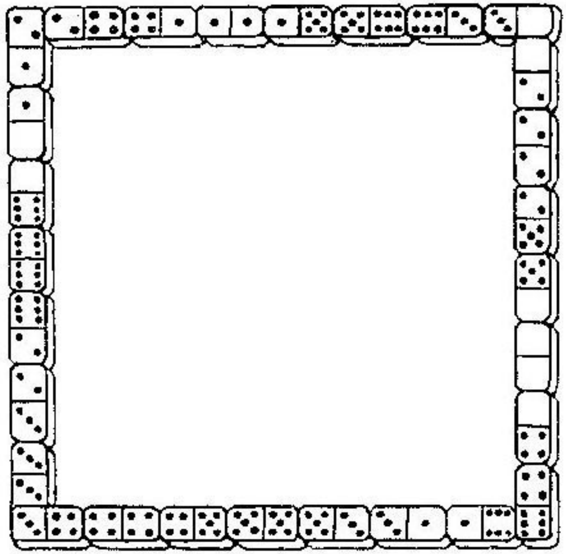


Figura 269

Los siete cuadrados

Cuatro fichas de dominó pueden elegirse de tal modo que con ellas pueda hacerse un cuadrado, en el que cada uno de los lados contenga la misma suma de puntos. Una muestra puede verse en la fig. 270: sumando los puntos que hay en cada lado del cuadrado, se obtiene 11 en todos los casos.

Disponiendo de un juego de dominó completo, ¿podría usted hacer, al mismo tiempo, *siete* cuadrados de este tipo? No se exige que la suma de los puntos de un lado sea la misma en todos los cuadrados. Lo único que hace falta es que cada cuadrado tenga en sus cuatro lados el mismo número de puntos.

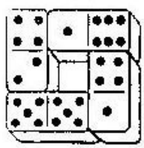


Figura 270

Cuadrados mágicos hechos con el dominó

La fig. 271 muestra un cuadrado de 18 fichas de dominó que llama la atención, porque la suma de los puntos de cualquiera de sus filas, columnas o diagonales es la misma: 13. Los cuadrados de este tipo se llaman mágicos desde muy antiguo.

Le proponemos a usted que haga con fichas de dominó varios cuadrados mágicos de a 18 fichas, pero cuyas filas, columnas y diagonales dé otra suma de puntos. 13 es la suma mínima que pueden dar las filas de un cuadrado mágico formado con 18 fichas. La suma máxima es 23.

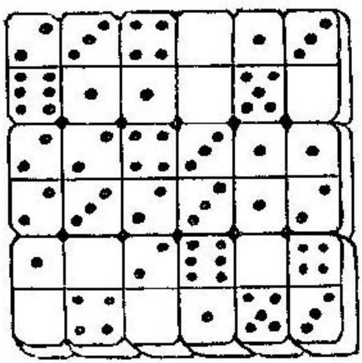


Figura 271

Una progresión de fichas de dominó

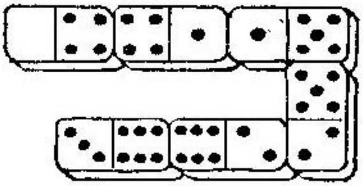


Figura 272

En la fig. 272 pueden verse seis fichas de dominó, colocadas según las reglas del juego, que se distinguen entre sí en que el número de puntos de las fichas (es decir, de las dos mitades de cada ficha) aumenta sucesivamente en una unidad: la serie comienza en el 4 y consta de los números de puntos siguientes: 4; 5; 6; 7; 8; 9.

Una serie de números que aumentan (o disminuyen) sucesivamente en una misma cantidad, se llama «progresión aritmética». En nuestra serie cada número es mayor que el precedente en una unidad; pero en una progresión, la diferencia existente entre sus números puede ser cualquiera otra.

El problema consiste en componer varias progresiones más, con seis fichas cada una.

«El juego de las 15» o «taquin»

La popular cajita con 15 fichas cuadradas, numeradas, tiene una historia interesante, que pocos de los jugadores sospechan. La referiremos con las palabras del matemático alemán, investigador de este juego, W. Arens.

«Hace cerca de medio siglo —a finales de los años 70 del siglo pasado— apareció en los Estados Unidos el «juego de las 15»; se propagó rápidamente y, debido al incalculable número de jugadores asiduos que atrajo, se convirtió en una verdadera calamidad social.

Lo mismo ocurrió por este lado del océano, en Europa. Aquí podían verse las cajitas con las 15 fichas incluso en manos de los pasajeros de los tranvías de caballos. Los dueños de oficinas y tiendas, desesperados por la afición de sus empleados a este juego, se vieron obligados a prohibirlo durante las horas laborales. Los propietarios de establecimientos de diversión aprovechaban esta manía para organizar grandes concursos. Este juego penetró hasta en las salas solemnes del reichstag alemán. «Como si fuera ahora veo en el reichstag a señores honorables mirando atentamente las cajitas cuadradas que tenían en sus manos» —recuerda el conocido geógrafo y matemático S. Günther, que era diputado durante los años de la epidemia del juego.

En París este juego halló acogida al cielo raso, en los bulevares, y pronto se propagó de la capital a todas las provincias. «No había ni una sola casita de campo en donde no anidara esta araña, esperando una víctima propensa a caer en sus redes» —escribía un autor francés.

En el año 1880 llegó, por lo visto, la fiebre del juego a su punto culminante. Pero poco después de esto, el tirano era derribado y vencido por las armas de las matemáticas. La teoría matemática del juego descubrió que de los numerosísimos problemas que pueden proponerse, sólo tienen solución la mitad; la otra mitad es imposible de resolver, cualesquiera que sean los procedimientos que se sigan.

Quedó claro por qué algunos problemas no cedían ni a los mayores esfuerzos y por qué los organizadores de concursos se atrevían a ofrecer premios enormes a los que los resolvieran. En este sentido superó a todos el inventor del juego, que le propuso al editor de un periódico neoyorquino, para el suplemento dominical, un problema irresoluble con un premio de 1000 dólares por su solución; y como el editor se quedó dudando, el inventor dijo que estaba dispuesto a aportar la suma señalada de su propio bolsillo. El inventor fue Samuel (Sam) Lloyd, que, además, se hizo muy conocido como autor de problemas ingeniosos y de multitud de acertijos. Sin embargo, es interesante el hecho de que no pudo patentar en Norteamérica el juego que había inventado. Según las instrucciones, para obtener la patente debía presentar el «modelo práctico» para llevar a cabo la partida de prueba; Lloyd le propuso al empleado de la oficina de patentes resolver un problema, y cuando este último le preguntó si dicho problema tenía solución, el inventor tuvo que responder: «No, esto es imposible desde el punto de vista matemático». «En este caso —replicó el empleado— no puede haber modelo práctico y, sin él, no hay patente». Lloyd se conformó con esta resolución, pero, si hubiera podido prever el éxito sin precedentes de su invento, es probable que hubiera sido más exigente» [1]).

A continuación vamos a citar la exposición que hace el propio inventor del juego acerca de algunos datos de su historia:

«Los antiguos habitantes del reino del ingenio —escribe Lloyd— recuerdan como a principios de los años 70 hice yo que todo el mundo se rompiera la

---

[1]) Este episodio fue utilizado por Mark Twain en su novela «El pretendiente americano».

cabeza con una cajita, que contenía fichas móviles y que recibió el nombre de «juego de las 15». El orden de las 15 fichas en la cajita cuadrada era correcto, pero las fichas 14 y 15 estaban trocadas como muestra la ilustración que se adjunta (fig. 274). El problema consistía en, moviendo sucesivamente las fichas, ponerlas en orden, corrigiendo la posición de las fichas 14 y 15.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Figura 273
Colocación normal de las fichas (posición I)

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Figura 274
Caso irresoluble (posición II)

El premio de 1000 dólares ofrecido por la primera solución correcta de este problema no lo consiguió nadie, a pesar de que se intentó sin descanso resolverlo. Se contaban graciosas historias de comerciantes que se olvidaban de abrir sus tiendas y de empleados honorables que se pasaban toda la noche debajo de un farol callejero, buscando la solución. Nadie quería renunciar a la búsqueda de la solución, porque todos estaban seguros de que les aguardaba el éxito. Se dice que los pilotos, distraídos con el juego, encallaban los barcos, los maquinistas se olvidaban de parar el tren en las estaciones, los granjeros abandonaban sus arados».

* * *

Ahora daremos a conocer a nuestro lector los rudimentos de la teoría de este juego. En su forma general esta teoría es muy complicada y está íntimamente relacionada con una de las partes del álgebra superior («teoría de los determinantes»). Nosotros nos limitaremos solamente a ciertos razonamientos expuestos por V. Arens.

El problema del juego consiste de ordinario en que, valiéndose de los movimientos sucesivos que permite hacer la existencia de un campo libre, hay que hacer que las 15 fichas, colocadas al principio de cualquier modo, queden ordenadas según sus números, es decir, en el ángulo superior izquierdo estará la ficha 1, a su derecha, la 2, después, la 3 y luego, en el ángulo superior derecho, la 4; en la fila siguiente se encontrarán, de izquierda a derecha, las 5, 6, 7 y 8 y así sucesivamente. Esta ordenación normal definitiva se da en la fig. 273.

Figúrese ahora que las 15 fichas se encuentran en el mayor desorden. Por medio de una serie de movimientos siempre se puede trasladar la ficha 1 al lugar que ocupa en la figura.

De igual modo, sin tocar la ficha 1, se puede hacer que la ficha 2 ocupe el puesto inmediato de la derecha. Después, sin tocar las fichas 1 y 2, se pueden colocar las 3 y 4 en sus puestos normales; si casualmente no se hallan en las dos últimas columnas, es fácil trasladarlas primeramente a esta zona y luego, haciendo una serie de traslaciones, lograr el resultado apetecido. Ahora la fila superior 1, 2, 3, 4 ya está puesta en orden y en las siguientes manipulaciones con las fichas no tocaremos esta fila. Por este mismo procedimiento procuraremos poner en orden la segunda fila: 5, 6, 7 y 8; es fácil convencerse de que esto siempre se puede conseguir. Después, en el espacio correspondiente a las dos últimas filas, hay que poner en la posición normal las fichas 9 y 13; esto también se logra siempre. Ninguna de las fichas 1, 2, 3, 4. 5, 6, 7, 8, 9, y 13, puestas ya en orden, vuelven a moverse; queda un pequeño espacio de seis campos, de los cuales uno está libre y los otros cinco ocupados por las fichas 10, 11, 12, 14 y 15 en orden arbitrario. Dentro de los límites de este espacio de seis puestos siempre pueden ponerse en sus lugares normales las fichas 10, 11 y 12. Cuando esto se ha conseguido, las fichas 14 y 15 resultan colocadas en la última fila en orden normal o en orden inverso (fig. 274). Por este procedimiento, que el lector puede comprobar en la práctica, llegamos al siguiente resultado.

Cualquiera que sea la colocación inicial de las fichas, éstas pueden ponerse en el orden representado en la fig. 273, posición *I*, o en el orden que indica la fig. 274, posición *II*.

Si una colocación determinada, que llamaremos *S* para simplificar, puede transformarse en la posición *I*, es evidente que también será posible la transformación inversa, es decir, la posición *I* en la posición *S*. Esto se explica porque todos los pasos de las fichas son reversibles: si, por ejemplo, en el esquema *I* podemos colocar la ficha 12 en el campo libre, este mismo paso podemos darlo al revés haciendo el movimiento contrario.

Tenemos, pues, dos series de colocaciones tales, que de las posiciones de una de ellas se puede pasar a la posición normal *I* y de las posiciones de la otra, a la posición *II*. Y viceversa, de la colocación normal puede obtenerse cualquiera de las posiciones de la primera serie, y de la colocación *II*, cualquier posición de la segunda serie. Finalmente, si se tienen dos posiciones cualesquiera pertenecientes a una misma serie, de la una se puede pasar a la otra y viceversa.

Y, continuando por este camino, ¿no podrían unificarse las posiciones *I* y *II*? Puede demostrarse de un modo riguroso (aunque no entraremos en pormenores) que de una de estas dos posiciones es imposible pasar a la otra, cualquiera que sea el número de pasos que se den. Por esta razón, el número enorme de posiciones posibles de las fichas se descompone en dos series independientes: 1ª, aquella de cuyas posiciones se puede pasar a la posición normal *I*, es decir, la de las posiciones resolubles; y 2ª, aquella de cuyas posiciones puede pasarse a la posición *II* y de las que, por consiguiente, en modo alguno puede pasarse a la posición normal, es decir, éstas son las posiciones por cuya resolución se ofrecían premios enormes.

¿Cómo puede saberse si una posición dada pertenece a la primera serie o a la segunda? Un ejemplo aclarará esto.

Consideremos la colocación representada en la fig. 275.

1	2	3	4
5	6	7	9
8	10	14	12
13	11	15	

Figura 275

La primera fila de fichas está en orden, lo mismo que la segunda, a excepción de la última ficha (9). Esta ficha ocupa el puesto que en la posición normal pertenece a la 8. La ficha 9 está por lo tanto, *antes* que la 8: este adelantamiento del orden normal se llama «desorden». Acerca de la ficha 9 decimos: aquí existe un desorden. Si continuamos observando las fichas, descubrimos otro adelantamiento en la ficha 14, que está colocada tres puestos antes (las fichas 12, 13 y 11) de su posición normal: aquí hay tres desórdenes (la ficha 14 está antes que la 12; la 14, delante de la 13; y la 14, antes que la 11). En total contamos ya $1 + 3 = 4$ desórdenes. Después, la ficha 12 está colocada antes que la 11 y lo mismo ocurre con la ficha 13, que está antes que la 11. Esto da dos desórdenes más. En total tenemos seis desórdenes. De un modo semejante se establece el número total de desórdenes que hay en cada colocación, después de dejar libre el último puesto en el ángulo inferior derecho. Si el número total de desórdenes es *par*, como en el caso que hemos examinado, de la colocación dada puede pasarse a la posición final normal, en otras palabras, la colocación pertenecerá a la serie de las que puedan resolverse. Pero si el número de desórdenes es *impar*, la colocación dada pertenecerá a la segunda serie, es decir, a la de las imposibles de resolver (el desorden nulo se considera par).

Gracias a la claridad que introdujeron en este juego las matemáticas, ahora es ya completamente incomprensible el apasionamiento febril y el interés que despertó en su tiempo. Las matemáticas crearon una teoría exhaustiva de este juego, una teoría que no deja ni un solo punto dudoso. El resultado del juego depende no de determinadas casualidades ni del ingenio, como en otros juegos, sino de factores puramente matemáticos, que los predeterminan con absoluta fidelidad.

Ocupémonos ahora de los problemas de este campo.

He aquí algunos problemas *resolubles* ideados por Loyd, el inventor del juego.

Primer problema

Partiendo de la colocación representada en la fig. 274, poner las fichas en el orden correcto, pero con el campo libre en el ángulo superior izquierdo (fig. 276).

	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

Figura 276

Segundo problema

Partiendo de la colocación que se ve en la fig. 274, déle a la caja un giro de un cuarto de vuelta a la derecha y mueva las fichas hasta que tomen la posicion que indica la fig. 277.

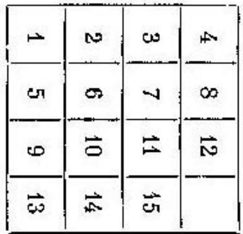


Figura 277

Tercer problema

Moviendo las fichas según las reglas del juego, convierta la caja en un cuadrado mágico, a saber: coloque las fichas de tal modo, que la suma de sus números sea la misma en todas las direcciones e igual a 30.

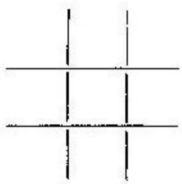
«El juego de las 11»

En este juego participan dos jugadores. Se colocan en la mesa 11 cerillas (o granos, chinas, etc.). El primer jugador coge una, dos o tres de ellas, las que quiera. Después, el segundo jugador coge también una, dos o tres cerillas, según desee. Luego vuelve a coger el primer jugador y así sucesivamente. No se pueden coger más de tres cerillas de una vez. El que coge la última cerilla, pierde.

¿Cómo deberá jugar usted para ganar siempre?

«El juego de las 15»

Ahora no se trata del «juego de las 15», que consiste en mover fichas cuadradas, numeradas, dentro de una cajita. El juego que proponemos es de otro tipo y se parece más al juego de los ceros y los unos. Juegan dos jugadores sucesivamente. El primer jugador escribe una cifra cualquiera, del 1 al 9, en uno de los cuadrados de la cuadrícula que se representa a continuación



El segundo jugador escribe otra cifra, eligiendo el cuadrado de tal forma, que el primer jugador, en el turno siguiente, no pueda terminar una fila de tres cifras (la fila puede ser transversal o diagonal) con una suma igual a 15.

Gana el jugador que termina en uno de sus turnos una fila con la suma 15 o que llena el último cuadrado de toda la cuadrícula.

¿Qué piensa usted, existe algún procedimiento de ganar siempre en este juego?

«El juego de las 32»

Juegan dos jugadores. Ponen en la mesa 32 cerillas. El que empieza coge una, dos, tres o cuatro cerillas. Después, el otro coge también las cerillas que quiere, pero no más de cuatro. Luego el primero vuelve a coger no más de cuatro cerillas y así sucesivamente. El que coge la última cerilla gana el juego.

Como ve, este juego es fácil. Pero es además interesante, porque el que empieza el juego puede ganar siempre, si calcula bien el número de cerillas que debe coger.

¿Podría usted decir cómo debe jugar para ganar?

Lo mismo, pero al contrario

El «juego de las 32» se puede modificar: el que coge la última cerilla no gana, sino que, por el contrario, pierde.

¿Cómo hay que jugar en este caso para ganar?

«El juego de las 27»

Este juego es parecido al anterior. También toman parte en él dos jugadores y, del mismo modo, cogen por turno no más de cuatro cerillas. Pero el final es distinto: se considera ganador el que, al terminar el juego, tiene un número par de cerillas.

Aquí también lleva ventaja el que empieza. Este, calculando bien sus jugadas, puede ganar siempre. ¿En qué consiste el secreto para no perder en el juego?

De otra forma

En el «juego de las 27» se puede poner también la condición inversa, es decir, que se considere vencedor aquel, que, una vez terminado el juego, resulte tener un número impar de cerillas. ¿Cuál será en este caso el procedimiento para no perder?

Viaje matemático

En este juego pueden participar varias personas. Para esto hay que hacer lo siguiente:

1) un tablero para el juego (de cartón);
2) un dado (de madera) y
3) varias fichas, una para cada jugador.

El tablero se recorta, en forma de cuadrado, de una hoja de cartón. Es preferible que sea de grandes dimensiones. El cuadrado debe dividirse en 10×10 casillas, las cuales se numeran del 1 a 100, como muestra el dibujo en pequeño de la fig. 278.

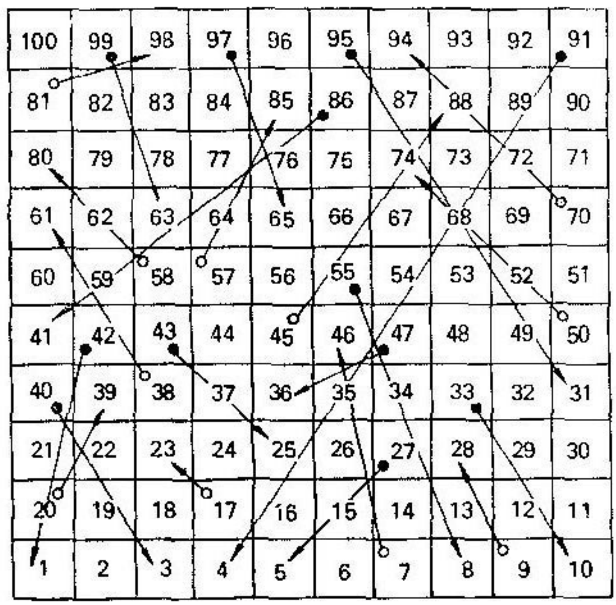


Figura 278

El dado, de 1 cm de altura aproximadamente, se corta de una varilla de madera de sección cuadrangular; sus caras se alisan con papel de lija y se marcan con las cifras del 1 al 6 (lo mejor es representar estas cifras por puntos, lo mismo que en las fichas del dominó).

De fichas pueden servir redondelitos o cuadraditos de cartón de distintos colores u otros objetos cualesquiera.

Los participantes, después de coger sus fichas respectivas, comienzan el juego echando el dado sucesivamente. El que saca 6 puntos empieza a moverse por las casillas del tablero, poniendo su ficha en la número 6. Cuando le llega su turno de echar otra vez el dado, adelanta su ficha en tantas casillas como puntos salen. Al llegar a una casilla en la cual comienza una flecha, la ficha deberá seguir dicha flecha hasta el fin, unas veces hacia adelante y otras hacia atrás.

El que llaga primero a la centésima casilla, gana la partida.

Piense un número

Haga atentamente todas las operaciones que aquí se dicen con el número que haya pensado y yo le diré el resultado de sus cálculos.

Si el resultado es otro, compruebe sus cálculos y se convencerá de que el error es suyo y no mío.

№ 1

Piense un número
menor que 10
(y que no sea cero)

Multiplíquelo por 3.
Al resultado, añádale 2.
Multiplique por 3 lo obtenido
Al producto súmele el número pensado.
Tache la primera cifra del total.
Al resto, añádale 2.
Divida por 4 lo obtenido.
Añádale 19 al resultado.

Ahora tendrá 21

№ 2

Piense un número
menor que 10
(y que no sea cero)

Multiplíquelo por 5.
Duplique el producto.
Al resultado, añádale 14.
De esta suma reste 8.
Tache la primera cifra del resto.
Divida por 3 lo que queda.
Añádale 10 al cociente.

Ahora tendrá 12

№ 3

Piense un número
menor que 10
(y que no sea cero)

Añádale 29.
Quite la última cifra de la suma.
Multiplique lo que queda por 10.
Súmele 4 al producto.
Multiplique lo obtenido por 3.
Réstele 2 al resultado.

Ahora tendrá 100

№ 4

Piense un número
menor que 10
(y que no sea cero)

Multiplíquelo por 5.
Duplique lo obtenido.

23—0990

Reste del resultado el número que pensó.
Sume las cifras de la diferencia obtenida.
Al total, añádale 2.
Eleve al cuadrado la suma.
Réstele 10 al número obtenido
Divida la diferencia por 3.

Ahora tendrá 37

№ 5

Piense un número menor que 10 (y que no sea cero)

Multiplíquelo por 25.
Añádale 3.
Lo obtenido, multiplíquelo por 4.
Tache la primera cifra de este producto.
Eleve al cuadrado el número que queda.
Sume las cifras del resultado obtenido.
Añádale 7.

Ahora tendrá 16

№ 6

Piense un número de dos cifras

Súmele 7.
Reste de 110 esta suma.
Al resto, añádale 15.
Al total, súmele el número pensado.
Divida por dos el número obtenido.
Reste 9 del resultado.
Multiplique por 3 la diferencia.

Ahora tendrá 150

№ 7

Piense un número menor que 100

Súmele 12.
Reste de 130 esta suma.
Añádale 5 a la diferencia.
Al total, añádale el número pensado.
Reste 120 de la suma obtenida.
Multiplique por 7 la diferencia.
Réstele 1 al producto.
Divida por 2 el resto.
Súmele 30 al cociente.

Ahora tendrà 40

№ 8

Piense un número cualquiera (que no sea cero)

Duplíquelo.
Añádale 1 al número obtenido.
Multiplique por 5 el nuevo resultado.
Deseche todas las cifras, menos la última.
Multiplique por sí misma la cifra que queda.
Sume las cifras del resultado.

Ahora tendrá 7

№ 9

Piense un número menor que 100

Súmele 20.
El número obtenido réstelo de 170.
Reste 6 de lo que quede.
Súmele a la diferencia el número pensado.
Sume las cifras del número obtenido.
Multiplique esta suma por sí misma.
Réstele 1 al total.
Divida por 2 la cantidad obtenida.
Súmele 8 al cociente.

Ahora tendrá 48

№ 10

Piense un número de tres cifras

Escriba a su derecha este mismo número.
Divida por 7 el número que resulte.
Divida el cociente por el número pensado.
Divida por 11 la cantidad obtenida.
Duplique el resultado.
Sume las cifras del número que obtiene.

Ahora tendrá 8

Vamos a adivinar

Juguemos ahora, amigo lector, a adivinar: usted pensará números, y yo los adivinaré. No importa que los lectores sean miles ni que estén leyendo este libro en cualquier lugar, a millares de kilómetros de mí, el número que tenga en su mente lo adivinaré de todos modos.

Empecemos.

Piense la cifra que quiera. Pero no confunda las palabras «cifra» y «número»: cifras sólo hay 10, del 0 al 9; los números son, en cambio, una cantidad infinita. Así, pues, piense cualquier *cifra*. ¿La ha pensado ya? Bien, multiplíquela por 5; pero no se equivoque, de lo contrario no resultará bien el juego.

¿Ha multiplicado ya por 5?... ¿Sí?, pues multiplique por 2 lo que haya obtenido. ¿Lo ha hecho?... Súmele 7 al producto.

Ahora táchele la primera cifra al número obtenido; deje solamente la última cifra.

¿Ya está?... Súmele 4 a lo que haya quedado. Réstele 3. Añádale 9.

¿Ha hecho todo lo que he dicho?... Pues, ahora le diré cuánto ha obtenido.

Ha obtenido 17.

¿No es así? Si quiere lo hacemos otra vez. ¡Venga!

¿Ha pensado la cifra?... Triplíquela. Lo que haya resultado vuélvalo a triplicar. Ahora, súmele al número obtenido la cifra que haya pensado.

¿Lo ha hecho?... Añádale 5 a lo obtenido. Tache en la suma resultante todas las cifras, menos la última. ¿Las ha tachado? ... Súmele 7 a lo que quede. Réstele 3 y añádale 6.

¿Quiere que le diga qué número tiene ahora en su imaginación?

El 15.

¿He acertado? Si no he acertado, la culpa es de usted. Por lo visto, se ha equivocado en alguna de las operaciones.

Si quiere que probemos por tercera vez, yo no tengo inconveniente.

¿Ha pensado la cifra? ... Duplíquela. Lo que haya obtenido, vuelva a duplicarlo. Duplique otra vez el nuevo resultado. Añada la cifra pensada. Vuelva a añadir la cifra pensada. Súmele 8. Tache todas las cifras, menos la última. Al número que queda réstele 3. Después, súmele 7.

Ahora tendrá usted 12.

Yo podría acertar cuántas veces fuera necesario, sin equivocarme nunca. ¿Cómo lo hago?

Debe pensar usted que todo lo que está aquí impreso lo escribí yo varios meses antes de que este libro viese la luz y, por lo tanto, mucho antes de que usted pensara sus números. Esto demuestra que el número que yo acierto no depende en nada del que usted piensa.

Pero, ¿cuál es el secreto?

Adivinar un número de tres cifras

Piense un número de tres cifras. Sin enseñármelo, duplique su primera cifra; de las demás cifras prescinda por ahora. A lo que haya resultado, súmele 5. Lo obtenido multiplíquelo por 5, añádale la segunda cifra del número que pensó y multiplique por 10 el resultado. Al número recién obtenido súmele la tercera cifra del número pensado y dígame lo que ha obtenido. Inmediatamente le diré qué número pensó usted.

Pondré un ejemplo. Supongamos que pensó usted el número 387.

Haga con él las operaciones siguientes:
Duplique la primera cifra: $3 \times 2 = 6$.
Súmele 5. $6 + 5 = 11$.
Multiplique por 5. $11 \times 5 = 55$.
Añada la segunda cifra: $55 + 8 = 63$.
Multiplique por 10. $63 \times 10 = 630$.
Sume la tercera cifra: $630 + 7 = 637$.
Usted me dice que ha obtenido el número 637, y yo le digo el número que usted pensó.
¿Cómo lo adivino?

Truco numérico

Piense un número.
Súmele 1.
Multiplique por 3.
Vuelva a sumarle 1.
Añada el número pensado.
Dígame el resultado que ha obtenido.
Cuando usted me diga el resultado final de todas estas operaciones, yo le restaré 4, dividiré el resto por 4 y obtendré el número que usted había pensado.
Por ejemplo, usted piensa el número 12.
Le añade 1, y obtiene 13.
Lo multiplica por 3, y resultan 39.
Le suma 1, y tendrá 40.
Le añade el número pensado: $40 + 12 = 52$.
Cuando usted me dice que ha obtenido el número 52, yo le resto 4, y la diferencia, 48, la divido por 4. Obtengo 12, que es el número que usted había pensado.
¿Por qué se acierta siempre de este modo?

¿Cómo adivinar la cifra tachada?

Pídale a un compañero que piense un número cualquiera de varias cifras y que haga lo siguiente:
que escriba el número pensado,
que cambie como quiera el orden de sus cifras,
que reste el número menor del mayor,
que tache una de las cifras del resto (que no sea cero),
y que le diga las demás cifras en un orden cualquiera.
En respuesta, usted le dice cuál es la cifra tachada.
Ejemplo. Su compañero piensa el número 3857.
Después hace lo siguiente:

3857,
8735,
$8735 - 3857 = 4878$.

Después de tachar la cifra 7, él le dice a usted las demás cifras en el orden, por ejemplo, siguiente: 8, 4, 8.

Por estas cifras puede usted hallar la tachada. ¿Qué debe hacer para esto?

¿Cómo adivinar el día y el mes de nacimiento?

Propóngale a un compañero que escriba en una hoja de papel el día del mes en que nació y que haga las operaciones siguientes:

que duplique el número escrito,
que multiplique por 10 lo obtenido,
que le sume 73 al producto,
que multiplique por 5 la suma,
y que, al total, le añada el número de orden del mes en que nació.

El le dice a usted el resultado final de todas las operaciones y usted le dice a él la fecha en que nació.

Ejemplo. Su compañero nació el 17 de agosto, es decir, el día 17 del mes 8. El hace lo siguiente:

$$\begin{aligned} 17 \times 2 &= 34, \\ 34 \times 10 &= 340, \\ 340 + 73 &= 413, \\ 413 \times 5 &= 2065, \\ 2065 + 8 &= 2073. \end{aligned}$$

Su compañero le dice a usted el número 2073 y usted le dice a él la fecha en que nació.

¿Cómo puede usted hacer esto?

¿Cómo se adivina la edad del interlocutor?

Usted puede adivinar la edad que tiene su interlocutor, si le pide que haga lo siguiente:

que escriba, una detrás de otra, dos cifras que se diferencien entre sí en más de 1;
que escriba entre ellas una tercera cifra cualquiera;
que invierta el orden de las cifras del número así obtenido;
que reste el número menor del mayor;
que ponga las cifras del resto en orden inverso;
que le sume este nuevo número al resto anterior;
que le añada a esta suma la edad que tiene.

Su interlocutor le dice a usted el resultado final de todas las operaciones, y usted le dice la edad que él tiene.

Ejemplo. Su interlocutor tiene 23 años. Hace lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
&25,\\
&275,\\
&572,\\
572 - 275 &= 297,\\
297 + 792 &= 1089,\\
1089 + 23 &= 1112.
\end{aligned}
$$

Su interlocutor le dice a usted el número 1112, y usted, partiendo de esto, halla la edad que él tiene.

¿Cómo puede usted hacerlo?

¿Cómo adivinar el número de hermanos y hermanas?

Usted puede adivinar cuántos hermanos y hermanas tiene un camarada suyo, si le pide que haga lo siguiente:

que añada 3 al número de hermanos;
que multiplique por 5 el número obtenido;
que a este producto le sume 20;
que multiplique la suma por 2;
que al resultado le añada el número de hermanas
y que a esta suma le agregue 5.

Su camarada le dice a usted el resultado final de estas operaciones, y usted le dice cuántos hermanos y hermanas tiene él.

Ejemplo. Su compañero tiene cuatro hermanos y siete hermanas. El hace lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
4 + 3 &= 7,\\
7 \times 5 &= 35,\\
35 + 20 &= 55,\\
55 \times 2 &= 110,\\
110 + 7 &= 117,\\
117 + 5 &= 122.
\end{aligned}
$$

Su camarada le dice a usted que ha obtenido el número 122, y usted le dice cuántos hermanos y hermanas tiene él.

¿Cómo puede usted hacer esto?

Truco con la guía de teléfonos

Este truco no es menos sorprendente y se hace como sigue.

Propóngale a un compañero suyo que escriba cualquier número de tres cifras diferentes. Supongamos que escribe el número 648. Dígale que ponga las cifras del número elegido en orden inverso y que del número mayor reste el menor [1]). El escribirá lo siguiente:

$$\begin{array}{r} 846 \\ -\,648 \\ \hline 198 \end{array}$$

Pídale ahora que ponga también en orden inverso las cifras de esta diferencia y que sume los dos números. Su compañero escribirá:

$$\begin{array}{r} 198 \\ +\,891 \\ \hline 1089 \end{array}$$

Estas operaciones las hará sin que usted las vea, de manera que pensará que usted no sabe el resultado total.

Entonces, usted le da una guía de teléfonos, y le dice que la abra por la página cuyo número coincide con las tres primeras cifras del resultado final. Su camarada la abrirá por la página 108 y quedará en espera de lo que usted diga. Usted le pide que, en esta página, cuente de arriba abajo (o de abajo arriba) tantos apellidos de abonados como indica la última cifra del número total (es decir, del número 1089). El busca al abonado que hace nueve, y usted le dice cómo se llama este abonado y cuál es el número de su teléfono.

Su sabiduría, como es natural, asombrará a su compañero, ya que él eligió el primer número que se le ocurrió, y usted acertó sin titubear el apellido del abonado y el número de su teléfono.

¿En qué consiste el secreto de este truco?

¿Cómo adivinar una ficha de dominó?

Este es un truco aritmético basado en el cálculo.

Supongamos que un compañero suyo se guarda en el bolsillo una ficha cualquiera de dominó. Usted puede adivinar qué ficha es ésta, si él hace, sin equivocarse, unas operaciones fáciles. Figúrese, por ejemplo, que la ficha que ocultó es la 6—3.

Pídale a su compañero que duplique uno de estos números (por ejemplo, el 6):

$6 \times 2 = 12.$

[1]) Si el resto tiene sólo dos cifras (99), se escribe con un cero delante (099).

Al número duplicado, que le sume 7;
$12 + 7 = 19$.

Después, que multiplique por 5 el número obtenido:
$19 \times 5 = 95$.

A este producto, que le sume el otro número de la ficha de dominó (es decir, el 3):
$95 + 3 = 98$.

Su compañero le dice a usted este resultado final, y usted le resta mentalmente 35 y conoce la ficha que él guardó:
$98 - 35 = 63$, es decir, la ficha $6 - 3$.

¿Por qué resulta así y por qué hay que restar siempre 35?

Una memoria sorprendente

Algunos ilusionistas llaman la atención con su extraordinaria memoria: recuerdan largas series de palabras, números, etc. Cualquiera de ustedes puede también admirar a sus camaradas con un truco semejante. He aquí como hay que hacerlo.

Prepare 50 tarjetas de papel y escriba en ellas los números y las letras que se indican en la tabla siguiente.

A 24 020	B 36 030	C 48 040	D 510 050	E 612 060
A1 34 212	B1 46 223	C1 58 234	D1 610 245	E1 712 256
A2 44 404	B2 56 416	C2 68 428	D2 7 104 310	E2 3 124 412
A3 54 616	B3 66 609	C3 786 112	D3 8 106 215	E3 9 126 318
A4 64 828	B4 768 112	C4 888 016	D4 9 108 120	E4 10 128 224
A5 750 310	B5 870 215	C5 990 120	D5 10 110 025	E5 11 130 130

A6 852 412	B6 972 318	C6 1 092 224	D6 11 112 130	E6 12 132 036
A7 954 514	B7 1 074 421	C7 1 194 328	D7 12 114 235	E7 13 134 142
A8 1 056 616	B8 1 176 524	C8 1 296 432	D8 13 116 340	E8 14 136 248
A9 1 158 718	B9 1 278 627	C9 1 398 536	D9 14 118 445	E9 15 138 354

En cada tarjeta habrá escrito, de este modo, un número de bastantes cifras y, en el ángulo superior izquierdo, un símbolo constituido por una letra latina o una letra y una cifra. Estas tarjetas repártalas en sus compañeros y dígales que usted se acuerda perfectamente del número que hay escrito en cada una de las tarjetas. Que le digan a usted solamente el símbolo de la tarjeta, y usted dirá en el acto el número que hay escrito en ella. A usted le dicen, por ejemplo, «E4», y usted responde inmediatamente:

—El número 10 128 224.

Como los números son de muchas cifras y suman en total medio ciento, su arte debe, naturalmente, admirar a los presentes. No obstante, usted no se ha aprendido de memoria los 50 largos números. El problema se resuelve de un modo mucho más fácil. ¿Cuál es el secreto de este truco?

Una memoria extraordinaria

Después de escribir en una hoja de papel una larga fila de cifras —20—25 cifras— declara usted que puede repetirla, sin equivocarse, cifra a cifra. Y, en efecto, lo hace usted, a pesar de que en la sucesión de cifras no se nota ninguna regularidad.

¿Cómo puede usted hacer esto?

Unos dados mágicos

Haga varios cubos de papel (por ejemplo, cuatro) y marque sus caras con cifras situadas como muestra la fig. 279. Con estos cubos podrá usted hacerle a sus amigos un truco aritmético interesante.

Pídales a sus compañeros que, en ausencia de usted, pongan los cubos uno encima de otro, formando columna, en las posiciones que quieran. Después de esto, usted entra en la habitación, echa una ojeada a la columna de cubos y halla inmediatamente a qué es

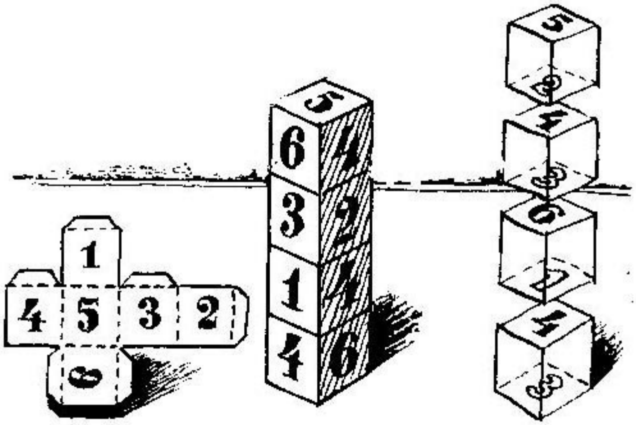


Figura 279

igual la suma de todas las cifras que hay en las caras tapadas de los cuatro cubos. Por ejemplo, en el caso que representa la figura, usted dice 23. Es fácil convencerse de que esto es cierto.

Un truco con tarjetas

Haga siete tarjetas como las que se ven en la fig. 280. Escriba en ellas los números y hágales los cortes rectangulares tal como están en las muestras indicadas. Una de las tarjetas se deja en blanco, pero en ella también se hacen cortes.

Al copiar los números en las tarjetas hay que prestar mucha atención para no equivocarse.

Cuando haya hecho esto, entréguele las seis tarjetas con números a un compañero suyo y pídale que piense en uno cualquiera de los números escrito en ellas. Después, dígale que le devuelva a usted todas aquellas tarjetas en que figure el número pensado.

Una vez recibidas las tarjetas, las coloca usted cuidadosamente unas escima de otras, las cubre con la tarjeta en blanco y suma mentalmente los números que se ven a través de las ventanillas. El número que resulta es el pensado.

Lo más probable es que ni usted mismo pueda descubrir el secreto del truco. Este se basa en un modo especial de elegir los números que figuran en las tarjetas. El fundamento de esta elección es bastante

39	63	54	38	45	61	49	33
53		57	46	43	41		62
34	40		55	42	51	59	35
60	32	44	59		58		58
36	48	50	56	52	47	42	37

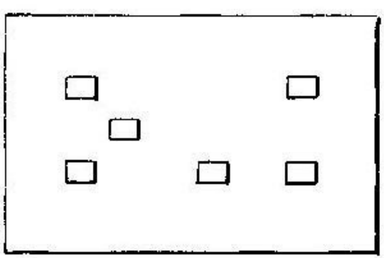
45	63	27	10	58	9	61	42
29	8	11	57	30	59		62
13	24		60	40	47	14	56
46		12	44		25		27
43	15	41	31	26	62	12	28

33	49	27	17	21	55	61	39
3		31	51	63	43		13
15	7	1	19	15	23	59	41
57		29	9		35		51
53	5	47	25	45	33	11	37

54	23	18	58	63	31	26	51
29		61	50	20	27		62
56	28		17	59	48	21	60
31		19	55		30	16	53
63	49	24	57	22	52	27	25

5	47	28	53	61	13	20	52
37		44	30	46	55	4	7
22	63		12	62	14	60	31
23		29	54		15		6
46	36	39	21	45	28	63	38

11	38	62	51	43	26	55	15
10		63	35	31	19		46
14	3		59	27	7	58	18
26		6	47	2	39		22
54	23	50	30	35	42	11	34



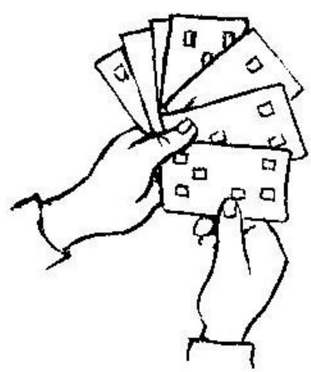


Figura 280

complicado y no voy a detenerme en él. En otro libro mío («Problemas recreativos»), dedicado a lectores con mejor preparación matemática, puede usted hallar una explicación detallada de este nuevo truco y de sus variantes más curiosas.

¿Cómo adivinar la suma de unos números que no se han escrito?

Usted se compromete a predecir la suma de tres números, de los cuales sólo se ha escrito uno. Este truco se hace así. Se le dice a un compañero que escriba un número con tantas cifras como quiera: éste será el primer sumando.

Supongamos que él escribe el número 84 706. En este caso, dejando sitio libre para los sumandos segundo y tercero, se escribe a priori la suma de los tres números:

1er sumando ⟷	84 706
2º »	
3er »	
Suma	184 705

Después de esto su camarada escribe el segundo sumando (que debe tener tantas cifras como el primero), y usted escribe el tercer sumando:

1er sumando ⟷	84 706
2º »	30 485
3er »	69 514
Suma	184 705

Es fácil convencerse de que la suma se predijo bien. ¿En qué consiste el secreto de este truco?

Predicción de la suma

Las supersticiones numéricas, lo mismo que los prejuicios de otros tipos, eran muy frecuentes en la Rusia de antes de la revolución. Como ejemplo de las consecuencias absurdas a que puede conducir la propensión a estas supersticiones, citaremos el caso de Iliá Teglev, héroe de la narración de Turguéniev «Pon ... pon ...», que basándose en una coincidencia casual de números, cree ser un Napoleón no reconocido. Este personaje se suicida, y en uno de sus bolsillos se descubre una hoja de papel con los cálculos siguientes:

Napoleón nació el 15 de agosto de 1769

	1769
	15
	8 (agosto es el 8º mes)
Total	1792
	1
	7
	9
	2
Total	19 (!)

Iliá Teglev nació el 7 de enero de 1811

	1811
	7
	1 (enero es el 1er mes)
Total	1819
	1
	8
	1
	9
Total	19 (!)

Napoleón murió el 5 de mayo 1825

	1825
	5
	5 (mayo es el 5º mes)
Total	1835
	1
	8
	3
	5
Total	17 (!)

Iliá Teglev murió el 21 de julio de 1834

	1834
	21
	7 (julio es el 7º mes)
Total	1862
	1
	8
	6
	2
Total	17 (!)

Adivinaciones numéricas semejantes se pusieron en boga a comienzos de la primera guerra mundial. Entonces, por medio de ellas se pretendía predecir cómo terminaría. En 1916 los periódicos suizos descubrieron a sus lectores el siguiente «misterio» acerca de la suerte de los emperadores de Alemania y Austria-Hungaría:

	Guillermo II	Francisco José
Año de nacimiento	1859	1830
Año de la coronación	1888	1848
Edad	57	86
Años en el trono	28	68
	Total 3832	Total 3832

Como puede ver, las sumas son iguales y cada una de ellas es el doble del año 1916. De esto se deduce que este año, fatal para ambos emperadores, predecía una derrota.

En este caso nos encontramos no con una coincidencia casual, sino, simplemente, con una majadería. La gente, cegada por la superstición, no se dio cuenta de que con sólo modificar ligeramente el orden de los renglones en los cálculos desaparecía por completo su carácter misterioso.

Ponga los renglones en este orden:

año de nacimiento,
edad,
año de la coronación,
años en el trono.

Y ahora piense: ¿qué año debe obtenerse si al de nacimiento de una persona se le añade su edad? Está claro que resultará el año en que se hace el cálculo. El mismo año debe obtenerse si al año de la coronación de un emperador se le suman los años que lleva en el trono. Por esto, es fácil comprender por qué la suma de estos cuatro números daba, para ambos emperadores, el mismo total, es decir, el doble del año 1916. Otra cosa no se podía esperar.

Lo que acabamos de decir puede utilizarse para hacer un interesante truco numérico. Dígale a un compañero suyo, que no conozca este sencillo secreto, que escriba en un papel, sin que usted lo vea, los cuatro números siguientes:

el año en que nació,
el año en que empezó a trabajar en la fábrica, (o que ingresó en la escuela, etc),
su edad, y
el número de años que lleva trabajando en la fábrica (o estudiando en la escuela, etc).

Aunque usted no conozca ninguno de los cuatro números escritos, no le costará trabajo adivinar su suma: lo único que tendrá que hacer es duplicar el año en que se hace el truco.

Si repite el truco, su secreto puede ser fácilmente descubierto. Para dificultar esto, introduzca entre los cuatro sumandos varios más, que usted conozca; si opera con discreción, la suma resultará distinta cada vez y descubrir el secreto será más difícil.

El dominó

Una cadena de 28 fichas

Para simplificar los problemas prescindamos por ahora de las siete fichas dobles, es decir, de las 0—0, 1—1, 2—2, etc. Quedan 21 fichas, en las cuales cada número de puntos se repite seis veces. Por ejemplo, 4 puntos (en un campo) figuran en las seis fichas siguientes:

4—0; 4—1; 4—2; 4—3; 4—5; 4—6.

Como puede verse, cada número de puntos se repite un número *par* de veces. Está claro que las fichas de este juego se pueden poner una al lado de otra, de modo que estén juntos los campos de igual número de puntos, hasta que se acaben todas las fichas. Y cuando ya se ha hecho esto, es decir, cuando nuestras 21 ficha están dispuestas formando una cadena continua, entre las juntas 0—0, 1—1, 2—2, etc., colocamos las siete fichas dobles que habíamos apartado. Después de esto las 28 fichas del dominó resultan puestas en cadena, cumpliendo las reglas del juego.

El principio y el fin de la cadena

Es fácil demostrar que la cadena formada con las 28 fichas del dominó debe terminar con el mismo número de puntos que comienza. En efecto, si no ocurriera así, los números de puntos que resultaran estar en los extremos de la cadena se repetirían un número *impar* de veces (puesto que dentro de la cadena los puntos forman parejas). Pero, como sabemos, en el juego completo de fichas de dominó cada número de puntos se repite ocho veces, es decir, un número de veces par. Por consiguiente, la suposición que hemos hecho, de que los números de puntos que hay en los extremos sean distintos, es incorrecta: estos números de puntos deben ser iguales. (Los razonamientos de este tipo reciben en matemáticas el nombre de «demostraciones por reducción al absurdo»).

De la propiedad que acabamos de demostrar de la cadena de fichas se deduce la consecuencia siguiente: una cadena de 28 fichas siempre puede cerrarse y obtener un anillo. Es decir, el juego completo de fichas de dominó puede colocarse, cumpliendo las reglas del juego, no sólo formando una cadena con los extremos libres, sino también formando un anillo cerrado.

Los lectores pueden preguntarse: ¿por cuántos procedimientos diferentes puede hacerse esta cadena o anillo? Sin entrar en los pesados pormenores del cálculo, diremos que el número de procedimientos distintos de formar la cadena (o el anillo) con las 28 fichas es enorme: superior a 7 billones. El número exacto es:

7 959 229 931 520

(éste es el resultado de multiplicar los factores siguientes: $2^{13} \times 3^8 \times 5 \times 7 \times 4231$).

Un truco con el dominó

La solución de este acertijo se desprende de lo dicho anteriormente. Como ya sabemos, las 28 fichas del dominó siempre pueden colocarse de manera que formen un anillo cerrado; por lo tanto, si de este anillo se quita una ficha tendremos que:

1) las 27 fichas restantes formarán una cadena continua, cuyos extremos no se cierran;

2) los números de puntos de los extremos de esta cadena son precisamente los que hay en la ficha que se quitó.

Por esto, si escondemos una ficha del dominó, podemos predecir los números de puntos que habrá en los extremos de la cadena que se forme con las demás fichas.

El cuadrado

La suma de los puntos de todos los lados del cuadrado que se busca debe ser igual a $44 \times 4 = 176$, es decir, 8 más que la suma total de los puntos que tiene el juego completo de fichas de dominó (168). Ocurre esto, claro está, porque los números de puntos que

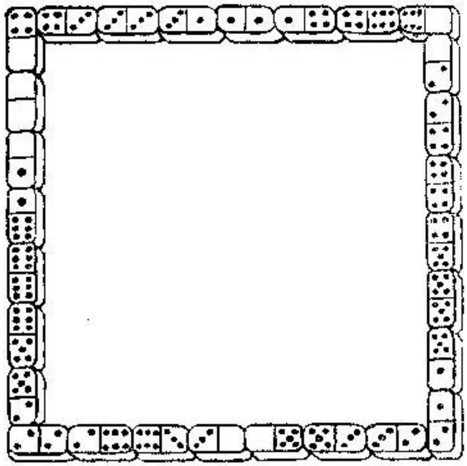


Figura 281

ocupan los vértices del cuadrado se suman dos veces. Esto determina cuál debe ser la suma de los puntos que haya en los vértices del cuadrado: 8. Así se simplifica un poco la búsqueda del orden en que hay que colocar las fichas, aunque el encontrarlo, a pesar de todo, es bastante difícil. La solución se da en la fig. 281.

Los siete cudrados

Damos dos de las muchas soluciones posibles de este problema. En la primera solución (fig. 282, arriba) tenemos:

1 cuadrado con la suma 3, 2 cuadrados con la suma 9,
1 » » » » 6, 1 cuadrado » » » 10,
1 » » » » 8, 1 » » » » 16.

En la segunda solución (fig. 282, abajo):

2 cuadrados con la suma 4, 2 cuadrados con la suma 10.
1 cuadrado » » » 8, 2 » » » » 12.

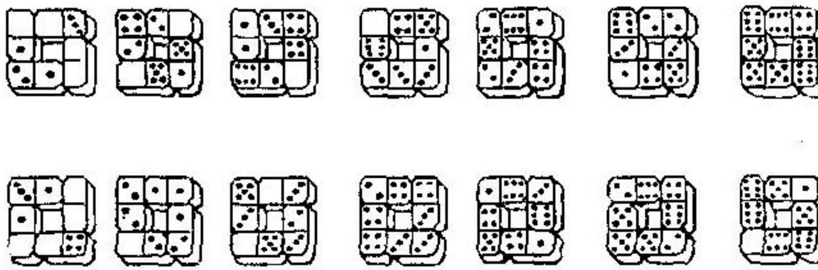


Figura 282

Cuadrados mágicos hechos con el dominó

En la fig. 283 se da una muestra de cuadrado mágico en la cual la suma de los puntos en cada fila, columna o diagonal es 18.

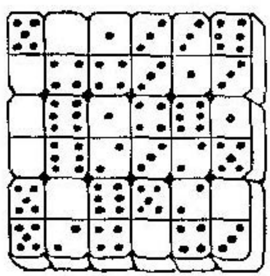


Figura 283

Una progresión de fichas de dominó

Como ejemplo citamos dos progresiones en las cuales la diferencia es 2:

a) 0—0; 0—2; 0—4; 0—6; 4—4 (ó 3—5); 5—5 (ó 4—6).

b) 0—1; 0—3 (ó 1—2); 0—5 (ó 2—3); 1—6 (ó 3—4); 3—6 (ó 4—5); 5—6.

Progresiones de seis fichas se pueden hacer en total 23. Sus fichas iniciales son las siguientes:

a) para las progresiones con diferencia 1:

0—0,	1—1,	2—1,	2—2,	3—2,
0—1,	2—0,	3—0,	3—1,	2—4,
1—0,	0—3,	0—4,	1—4,	3—5,
0—2,	1—2,	1—3,	2—3,	3—4.

b) para las progresiones con diferencia 2:

0—0, 0—2, 0—1.

«El juego de las 15» o «taquin»

Primer problema

La colocación dada por el problema puede obtenerse, partiendo de la posición inicial, por medio de los 44 pasos siguientes:

14, 11, 12, 8, 7, 6, 10, 12, 8, 7,
4, 3, 6, 4, 7, 14, 11, 15, 13, 9,
12, 8, 4, 10, 8, 4, 14, 11, 15, 13,
9, 12, 4, 8, 5, 4, 8, 9, 13, 14,
10, 6, 2, 1.

Segundo problema

La colocación dada por el problema se obtiene dando los siguientes 39 pasos:

14, 15, 10, 6, 7, 11, 15, 10, 13, 9,
5, 1, 2, 3, 4, 8, 12, 15, 10, 13,
9, 5, 1, 2, 3, 4, 8, 12, 15, 14,
13, 9, 5, 1, 2, 3, 4, 8, 12.

Tercer problema

El cuadrado mágico con suma 30 se obtiene después de dar la serie de pasos siguientes:

12, 8, 4, 3, 2, 6, 10, 9, 13, 15,
14, 12, 8, 4, 7, 10, 9, 14, 12, 8,
4, 7, 10, 9, 6, 2, 3, 10, 9, 6,
5, 1, 2, 3, 6, 5, 3, 2, 1, 13,
14, 3, 2, 1, 13, 14, 3, 12, 15, 3.

«El juego de las 11»

Si usted es mano, debe coger dos cerillas; quedan nueve. Cualquiera que sea el número de cerillas que coja el segundo jugador, usted deberá dejar en la mesa, después de su segunda jugada, sólo cinco cerillas; se comprende fácilmente que esto siempre es posible. Y cuando su adversario haya cogido las cerillas que quiera de esas cinco, usted le deja una y gana. Si a usted no le toca hacer la primera jugada, sólo podrá ganar si su adversario desconoce el secreto de cómo hay que jugar para ganar siempre.

«El juego de las 15»

Si se quiere ganar con seguridad hay que empezar con la cifra 5. ¿En qué casilla hay que escribirla? Veamos, uno a continuación de otro, los tres casos posibles.

1. El cinco se escribe en la casilla de en medio. Cualquiera que sea la casilla que elija su compañero de juego, usted podrá escribir en la casilla que quede libre en la misma fila.

		x
	5	
$10-x$		

$15 - 5 - x$ (donde x es la cifra escrita por su adversario). El número $15 - 5 - x$, o sea, $10 - x$, es, claro está, menor que 9.

2. El cinco se escribe en una de las casillas de los ángulos. Su compañero elige la casilla x o la casilla y. Si él escribe la cifra x, usted deberá escribir $y = 10 - x$; si escribe y, usted responderá con la cifra $x = 10 - y$. En ambos casos ganará usted.

5		
		x
	y	

3. El cinco se escribe en la casilla de en medio de la columna extrema. Su compañero podrá ocupar una de las cuatro casillas x, y, z, t.

	x	z
5		
	y	t

A la cifra x responderá usted con $y = 10 - z$; a la y, con $x = 10 - y$; a la z, con $t = 10 - z$, y a la t, con $z = 15 - t$. En todos los casos ganará.

«El juego de las 32»

El simple secreto que hay que saber para no perder nunca en este juego, se descubre con bastante facilidad si se intenta jugar una partida al revés, es decir, empezando por el final. No es difícil darse cuenta de que si en su penúltima jugada le deja a su adversario cinco cerillas en la mesa, ganará usted con toda seguridad, porque él no puede coger más de cuatro cerillas y, por consiguiente, usted puede coger después todas las demás. Pero, ¿qué hay que hacer para estar seguro de que en la penúltima jugada podrán dejarse cinco cerillas? Para esto en la jugada precedente hay que dejarle al adversario 10 cerillas exactamente: entonces, por muchas que él coja siempre quedarán seis por lo menos, y usted después siempre podrá dejarle cinco. Y, ¿qué hay que hacer para lograr que al compañero le queden 10 cerillas para coger? En la jugada anterior hay que dejar en la mesa 15 cerillas.

Así, restando cada vez cinco cerillas, nos enteramos de que antes hay que dejar en la mesa 20, y con anterioridad, 25, y, finalmente, la primera vez, 30 cerillas, es decir, al comenzar el juego hay que coger dos cerillas.

Por lo tanto, el secreto para ganar siempre es: la primera vez hay que coger dos cerillas; luego, después que su compañero haya cogido varias, se cogen las cerillas necesarias para que en la mesa queden 25; la vez siguiente se dejan en la mesa 20 cerillas, luego 10, y finalmente cinco. La última cerilla será siempre para usted.

Lo mismo, pero al contrario

Si la condición del juego es la inversa, o sea, que el que coja la última cerilla *pierde*, en la penúltima jugada deberá dejar en la mesa seis cerillas. Entonces, cualquiera que sea la cantidad que coja su compañero, no podrá dejarle a usted menos de dos ni más de cinco, es decir, en cualquier caso, podrá usted dejarle a él en la jugada siguiente la última cerilla. Para esto, en la jugada precedente hay que dejar en la mesa 11 cerillas, y en las jugadas anteriores a ésta, 16, 21, 26, y 31 cerillas respectivamente.

Así, pues, usted empieza cogiendo una sola cerilla, y en las siguientes jugadas le va dejando a su adversario 26, 21, 16, 11 y 6 cerillas; la última cerilla le tocará a él inevitablemente.

«El juego de las 27»

Aquí es más difícil hallar el procedimiento de ganar siempre que en el «juego de las 32».

Hay que partir de los dos razonamientos siguientes:

1. Si al final de la partida tiene usted un número *impar* de cerillas, deberá dejarle a su adversario cinco cerillas, con lo que estará seguro de ganar el juego. En efecto, en la siguiente jugada su compañero le dejará a usted cuatro, tres, dos o una cerilla; si le deja cuatro, usted coge tres y gana; si le deja tres, cogerá las tres y ganará; y si le deja dos, cogerá una y también ganará.

2. Si cuando la partida está próxima a terminar usted tiene un número *par* de cerillas, deberá dejarle a su adversario seis o siete. Efectivamente, veamos como transcurre después la partida. Si su adversario le deja seis cerillas, en la jugada siguiente coge usted una y, teniendo ya un número de cerillas impar, puede dejarle tranquilamente cinco cerillas a su compañero, con las cuales él perderá la partida inevitablemente. Si él le deja a usted no seis cerillas, sino cinco, usted coge cuatro y gana. Si le deja cuatro, usted coge todas y gana. Si le deja tres, usted coge dos y gana. Y, finalmente, si le deja dos, también gana usted. Menos de dos no le puede dejar.

Ahora ya no es difícil hallar el procedimiento para ganar siempre. Este procedimiento consiste en que, si usted tiene un número impar de cerillas, debe dejarle sobre la mesa a su adversario un número de ellas que sea igual a un múltiplo de 6 menos una unidad, a saber, 5, 11, 17 ó 23; y si tiene usted un número par de cerillas, deberá dejarle a su adversario un número de cerillas que sea múltiplo de 6 ó mayor que él en una unidad, es decir, 6 ó 7, 12 ó 13, 18 ó 19, 24 ó 25. El cero puede considerarse como número par; por esto, al empezar la partida deberá usted coger dos o tres de las 27 cerillas, y después proceder de acuerdo con lo antedicho.

Llevando la partida de este modo, ganará usted con toda seguridad. Pero procure que su adversario no coja el hilo del juego.

De otra forma

Si la condición del juego es la inversa y se considera ganador el que tenga un número *impar* de cerillas, deberá usted proceder del modo siguiente: si tiene usted un número *par* de cerillas, déjele a su adversario un número de ellas que sea menor que un múltiplo de 6 en una unidad; y si tiene un número impar, déjele a él un número de cerillas que sea múltiplo de 6 ó mayor que él en una unidad. Esto debe conducir inevitablemente a que gane usted. Al empezar el juego tiene usted cero cerillas (es decir, un número que se considera par); por lo tanto, en la primera jugada coja cuatro cerillas y déjele a su adversario 23.

Piense un número

Caso N° 1. Si el número pensado es a, las operaciones que se hacen al principio son:

$$(3a + 2) \times 3 + a = 10a + 6.$$

Se obtiene un resultado de dos cifras, la primera de las cuales es el número pensado, y la segunda es 6.

Tachando la primera cifra se excluye el número pensado.

Lo demás se comprende sin dificultad.

Los casos de adivinación N° 2, N° 3, N° 5 y N° 8 son diversas variantes del caso que acabamos de analizar.

En los casos N° 4, N° 6, N° 7 y N° 9 se utiliza otro procedimiento para eliminar el número pensado.

Por ejemplo, en el N° 9 las operaciones que se hacen al principio son:

$$170 - (a + 20) - 6 + a = 114.$$

Lo demás no es difícil de comprender.

Para adivinar el N° 10 se emplea un procedimiento especial. Escribir a la derecha de un número de tres cifras el mismo número, equivale a multiplicar dicho número por 1001 (por ejemplo, $356 \times 1001 = 356\,356$). Pero $1001 = 7 \times 11 \times 13$. Por esto, si el número pensado es a, las operaciones que se hacen al principio son:

$$\frac{a \times 1001}{7 \times a \times 11} = 13.$$

El resto es comprensible.

Como puede ver, la adivinación se basa en todos los casos en excluir el número pensado al hacer las operaciones. Sabiendo esto, procure usted mismo idear varios ejemplos nuevos de adivinanza.

Vamos a adivinar

Para comprender en qué consiste la adivinación en estos casos, fíjese en las operaciones que yo le digo que haga con las cifras pensadas.

En el primer ejemplo usted empezó multiplicando por 5 la cifra; después multiplicó por 2 lo obtenido. Es decir, multiplicó usted la cifra por 2×5, o sea, por 10, y todo número multiplicado por 10 da un resultado que termina en cero. Sabiendo esto, yo le pido que le añada 7; ahora ya sé que el número que tiene en su mente es de dos cifras: la primera la desconozco, pero la segunda sé que es 7. La cifra que desconozco le pido que la tache. ¿Qué número tiene ahora en su pensamiento? El 7, claro está. Yo podría decirle ya este número, pero como soy astuto, para que pierda usted la pista le pido que sume y reste a este siete diversos números, cosa que yo también hago mentalmente. Y por fin, le digo que ha obtenido usted 17. Este número tiene que resultarle a usted cualquiera que sea la cifra que piense.

La segunda vez sigo ya otro camino al hacer la adivinación, de lo contrario descubriría usted demasiado pronto en qué consiste el secreto. Yo hago que empiece usted por triplicar la cifra pensada, luego le pido que vuelva a triplicar el resultado y que al número obtenido le añada la cifra que pensó. ¿Qué debe resultarle a usted en fin de cuentas? Es fácil de comprender, porque todo lo hecho equivale a multiplicar la cifra pensada por $3 \times 3 + 1$, es decir, por 10. Y otra vez sé que resulta un número de dos cifras, cuya segunda cifra es cero. Y después hago lo mismo que antes: digo que le sume a este número cualquier cifra y que tache a continuación la primera, que para mí es desconocida; queda la cifra que conozco, con la cual se hacen varias operaciones para borrar las huellas.

Tercer caso. Aquí también se hace lo mismo, pero de otra forma. Yo le digo que duplique la cifra pensada, que lo obtenido vuelva a duplicarlo, que duplique también este segundo resultado y que a lo que salga le sume dos veces la cifra que pensó. ¿Qué da todo esto? Da la cifra pensada multiplicada por $2 \times 2 \times 2 + 1 + 1$, es decir, por 10. Lo demás se comprende fácilmente. Incluso si el número que usted pensó es 1 ó 0, el truco no falla.

Ahora ya puede hacer usted, tan bien como yo, estos experimentos con aquellos amigos suyos que no hayan leído este libro. También podrá usted idear sus propios procedimientos para adivinar. Esto no es difícil.

Adivinar un número de tres cifras

Fijémonos otra vez en las operaciones que se hicieron con cada cifra. La primera cifra se multiplicó primero por 2, luego por 5 y después por 10, es decir, en total por $2 \times 5 \times 10 = 100$. La segunda cifra se multiplicó por 10. La tercera se añadió sin variación alguna. Además, a todo esto se le sumó $5 \times 5 \times 10$, o sea, 250.

Por lo tanto, si al número obtenido se le resta 250, quedará: la primera cifra multiplicada por 100, más la segunda multiplicada por diez, más la tercera. En resumen, queda precisamente el número pensado.

De esto se deduce claramente lo que hay que hacer para adivinar el número pensado: al resultado de todas las operaciones hay que restarle 250. Lo que queda es el número de que se trata.

Truco numérico

Fijándose atentamente en las operaciones hechas, es fácil advertir que el adivinador debe obtener el número pensado miltiplicado por 4, más 4. Por lo tanto, si se restan estos 4 y se divide lo demás por 4, se obtiene el número pensado.

¿Cómo adivinar la cifra tachada?

El que sabe cómo se deduce la condición de divisibilidad por 9, conoce que la suma de las cifras de cualquier número da, cuando se divide por 9, el mismo resto que el propio número. Dos números formados con las mismas cifras, pero colocadas en otro orden, deben, por esta razón, dar los mismos restos si se dividen por 9. Por consiguiente, si de uno de estos números se resta el otro, la diferencia será divisible por 9 (porque la diferencia de los restos iguales es nula).

Sobre la base de lo expuesto puede usted saber que su compañero obtuvo, como resultado de la resta, un número cuyas cifras dan una suma múltiplo de 9. Como las cifras que él le dijo a usted son 8, 4, 8 y dan la suma 20, la cifra tachada tiene que ser, evidentemente, 7, que sumada a 20 da un número divisible por 9.

¿Cómo adivinar el día y el mes de nacimiento?

Para saber la fecha que se busca hay que restarle 365 al resultado final; en este caso, las dos últimas cifras de la diferencia indicarán el número de orden del mes, y las que están delante de ellas, el del día. En nuestro ejemplo

$$2073 - 365 = 1708.$$

Por el número 17—08 deducimos la fecha: 17/VIII. La razón de por qué esto es así se comprende si el número de orden del mes se designa por K, y el del día, por N, y se hacen con ellos las operaciones que se requieren.

Obtenemos $(2K \times 10 + 73) \times 5 + N = 100K + N + 365$.

Está claro que al restar 365 debemos obtener un número que contenga K centenas y N unidades.

¿Cómo se adivina la edad del interlocutor?

Haciendo varias veces las operaciones, se nota fácilmente que a la edad hay que añadirle siempre un mismo número, a saber, 1089. Por esto, si del número total que le dicen a usted se resta 1089, debe obtenerse la edad buscada.

Si el truco se hace varias veces, para evitar que el secreto sea descubierto se puede variar la última operación proponiendo, por ejemplo, dividir por 9 el número 1089 y sumar la edad al cociente.

¿Cómo adivinar el número de hermanos y hermanas?

Para saber el número de hermanos y hermanas hay que restar 75 del resultado final. En nuestro ejemplo

$$122 - 75 = 47.$$

La primera cifra de la diferencia es el número de hermanos, la segunda, el de hermanas.

En efecto, si el número de hermanos es a y el de hermanas es b, las operaciones conducen a la expresión

$$[(a + 3) \times (5 + 20)] \times 2 + b + 5 = 10a + b + 75,$$

y en el resto deberá obtenerse un número de dos cifras a y b unidades.

Este truco puede hacerse si se tiene la seguridad de que el número de hermanas no es mayor que nueve.

Truco con la guía de teléfonos

El secreto de este truco consiste sencillamente en que usted sabía de antemano el resultado final de las operaciones hechas por su compañero: cualquiera que sea el número de tres cifras con que se hagan las operaciones enumeradas, el resultado que se obtenga será siempre el mismo: 1089. De esto es fácil convencerse haciendo la prueba. Mirar previamente la guía de teléfonos y aprenderse el nombre y el apellido del abonado que figura en el renglón noveno (por abajo o por arriba) de la página 108, ya no es cosa difícil.

¿Cómo adivinar una ficha de dominó?

Veamos lo que se hizo con el primer número. Primero lo multiplicamos por 2, después por 5, y en total por 10. Además, le sumamos el número 7, que después multiplicamos por 2; es decir, le añadimos $7 \times 5 = 35$.

Por lo tanto, si al resultado le restamos 35, quedarán tantas decenas como puntos hay en una de las mitades de la ficha. La suma de los puntos de la otra mitad da la segunda cifra del resultado.

Ahora está claro por qué las cifras del resultado dan de una sola vez los dos números de puntos.

Una memoria sorprendente

El secreto de este truco consiste en que el símbolo de la tarjeta —la letra y la cifra— le indica a usted el número que hay escrito en ella.

Ante todo debe recordar usted que la letra A significa 20; la B, 30; la C, 40; la D, 50 y la E, 60. Por esto, la letra junto con la cifra que lleva al lado significa cierto número. Por ejemplo, A1 significa 21; C3, 43; E5, 65.

Conociendo este número y siguiendo la regla que veremos a continuación, puede usted formar el número de muchas cifras que figura en la tarjeta. Pondremos un ejemplo para demostrar como se hace esto.

Supongamos que el símbolo nombrado es E4, es decir, 64. Con este número hace usted lo siguiente:

Primero, suma sus cifras:

$$6 + 4 = 10.$$

Segundo, lo duplica:

$$64 \times 2 = 128.$$

Tercero, de la cifra mayor resta la menor:

$$6 - 4 = 2.$$

Cuarto, multiplica entre sí las dos cifras:

$$6 \times 4 = 24.$$

Y los resultados obtenidos los escribe unos a continuación de otros:

10 128 224.

Esto es el número que hay escrito en la tarjeta.

Las operaciones que hay que hacer se pueden representar así

$$\boxed{+,\ 2,\ -,\ \times}$$

es decir, suma, duplicación, resta y multiplicación.

Otros ejemplos.

El símbolo de la tarjeta es D3.

¿Qué número hay escrito en ella?

$$D3 = 53,$$
$$5 + 3 = 8,$$
$$53 \times 2 = 106,$$
$$5 - 3 = 2,$$
$$5 \times 3 = 15,$$

El número es el 8 106 215.

El símbolo de la tarjeta es B8.

¿Qué número hay escrito en ella?

$$\begin{aligned} &B8 = 38,\\ &3 + 8 = 11,\\ &38 \times 2 = 76,\\ &8 - 3 = 5,\\ &8 \times 3 = 24. \end{aligned}$$

El número es 1 176 524.

Para no cansar la memoria, puede usted ir diciendo las cifras a medida que las obtiene o irlas escribiendo despacio en el encerado.

Como descubrir el ardid que usted utiliza no es fácil, este truco suele desconcertar bastante al público.

Una memoria extraordinaria

El secreto es simple hasta más no poder: usted escribe sucesivamente los números de los teléfonos de varios amigos suyos.

Unos dados mágicos

Todo consiste en el orden en que están dispuestos los números en las caras de cada dado. Los números están colocados de manera que la suma de los que hay en las caras opuestas de cada dado es igual siempre a siete (compruébelo en la fig. 279). Por esto la suma de los números que hay en las caras superiores e inferiores de los cuatro dados que forman la columna es igual a $7 \times 4 = 28$. Restándole a 28 el número que hay escrito en la cara superior del dado que hay en lo alto, se puede hallar sin temor a equivocación la suma de los números que hay en las siete caras que no se ven de los dados de la columna.

¿Cómo adivinar la suma de unos números que no se han escrito?

Si a un número de cinco cifras se le suman 99 999, es decir, 100 000 — 1, delante del número aparece un uno y la última cifra disminuye en una unidad. En esto se funda el truco. Sumándole mentalmente 99 999 al primer sumando

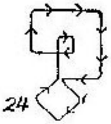
$$+\begin{array}{r}84\,706\\99\,999\end{array}$$

escribe usted la suma futura de los tres sumandos: 184 705. Lo único que tiene que hacer ahora es procurar que el segundo y el tercer sumandos juntos sumen 99 999. Para esto, al escribir el tercer sumando, restará usted mentalmente de nueve cada una de las cifras del segundo sumando. En nuestro ejemplo el segundo sumando es 30 485; por lo que usted escribirá 69 514. Y como

$$+\begin{array}{r}30\,485\\69\,514\\ \hline 99\,999,\end{array}$$

el resultado escrito a priori tiene que ser exacto inevitablemente.

378-379



DE UN TRAZO

(dibujo de figuras sin levantar el lápiz)

El problema de los puentes de Königsberg

La atención del genial matemático Euler la atrajo en una ocasión un problema sui generis que él enunció de esta forma:

«En Königsberg[1]) hay una isla que se llama Kneiphof. El río que la baña se divide en dos brazos (fig. 284), sobre los cuales hay tendidos siete puentes.

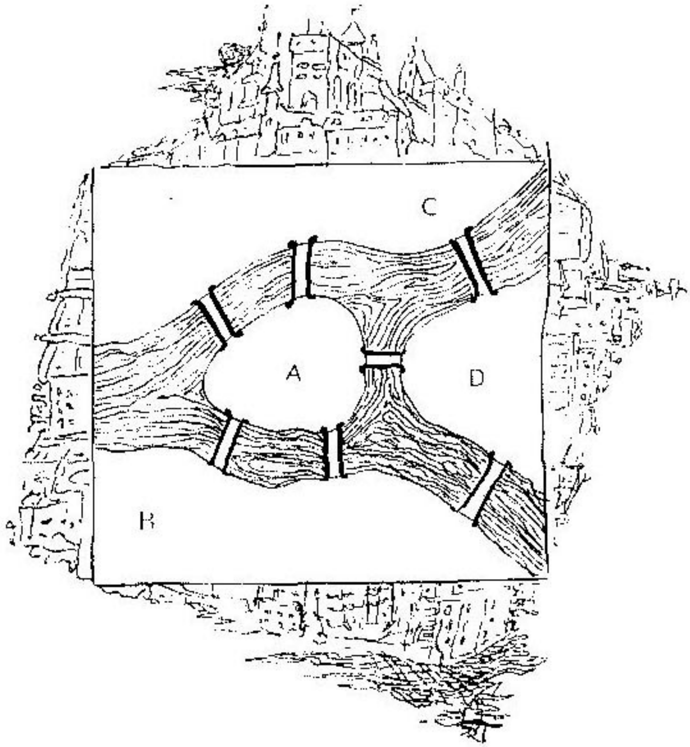


Figura 284

¿Pueden cruzarse todos estos puentes sin pasar por ninguno más de una vez?

Hay quien afirma que es posible. Otros, por el contrario, consideran que es imposible cumplir esta condición».

¿Qué opina usted?

---

[1]) Ahora Kaliningrado.

¿Qué es la topología?

Al problema de los puentes de Königsberg le dedicó Euler toda una investigación matemática, que fue presentada en 1736 a la Academia de Ciencias de San Petersburgo. Este trabajo comienza con las siguientes palabras, que determinan a qué rama de las matemáticas corresponde el estudio de estos problemas:

«Además de la rama de la geometría que estudia las magnitudes y los procedimientos de medición, que fue ya cuidadosamente elaborada en la antigüedad, Leibniz hizo mención por vez primera de otra rama que él llamó «geometría de posición». Esta rama de la geometría se ocupa solamente del orden en que están dispuestas las partes de las figuras, unas con respecto a otras, prescindiendo de sus dimensiones[1]).

Hace poco tuve ocasión de oír una conversación acerca de un problema de geometría de posición, y decidí exponer aquí, a modo de ejemplo, el procedimiento que hallé para resolverlo». Euler se refería al problema de los puentes de Königsberg.

Aquí no vamos a reproducir los razonamientos del gran matemático. Nos limitaremos a dar unas ideas concretas que confirman su conclusión. Consiste ésta en que el recorrido que plantea el problema es imposible.

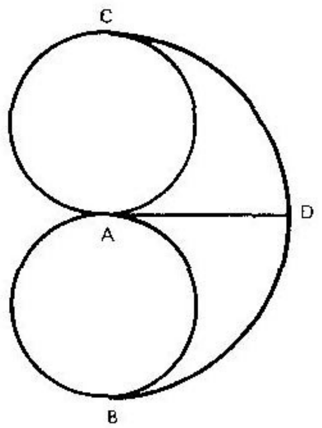


Figura 285

Análisis del problema

Para mayor claridad sustituimos el dibujo de la disposición de los brazos del río por el esquema simplificado de la fig. 285. En el problema planteado no tienen ninguna importancia las dimensiones de la isla ni las longitudes de los puentes (éste es el rasgo característico de todos los problemas topológicos: el no depender de las dimensiones relativas de las partes de la figura).

Por esto los lugares A, B, C y D (fig. 284) podemos sustituirlos en el esquema por los puntos de igual denominación en que se encuentran los caminos a seguir durante el recorrido. El problema se reduce ahora, como puede verse, a dibujar la fig. 285 de un trazo, es decir, sin levantar la pluma del papel y sin recorrer una misma línea dos veces.

[1]) En la actualidad esta rama de la geometría superior se llama «topología» y se ha convertido en una amplísima ciencia matemática. Los problemas que ofrecemos en este capítulo se refieren a un dominio que sólo constituye una pequeña parte de la topología.

Demostraremos que es imposible dibujar nuestra figura de un solo trazo. En efecto, a cada uno de los puntos nodales A, B, C y D hay que llegar por uno de los caminos y luego salir de él por otro camino; esta regla sólo tiene dos excepciones, a saber: el primer punto, al cual no hay que llegar de ninguna parte, y el último, del cual no hay que salir. Por lo tanto, para poder recorrer nuestra figura sin levantar la pluma es necesario que en cada uno de los puntos nodales, menos dos, converjan dos a cuatro caminos, es decir, un número par de ellos. Pero en cada uno de los puntos A, B, C y D de nuestra figura converge precisamente un número impar de líneas. Por esto es imposible dibujarla de un solo trazo de pluma y, por consiguiente, es imposible pasar los puentes de Königsberg como indica la condición del problema.

Siete problemas Intente dibujar de un solo trazo cada una de las siete figuras de la fig. 286. Recuerde las condiciones: dibujar todas las líneas de la figura dada sin levantar la pluma del papel, sin hacer rayas de más y sin pasar dos veces por una misma línea.

Un poco de teoría Los intentos de dibujar con una línea ininterrumpida las figs. 286, *1—6*, conducen a diversos resultados. Algunas figuras pueden dibujarse cualquiera que sea el punto desde el cual se comience a trazar la línea ininterrumpida. Otras sólo se pueden dibujar de un solo trazo cuando se empiezan desde puntos determinados. Finalmente, hay un tercer grupo de figuras que no puede dibujarse con una línea ininterrumpida. ¿A qué se debe esta diferencia? ¿Existen indicios que permitan determinar a priori si una figura dada puede dibujarse de un solo trazo y, si esto es así, el punto desde el cual debe comenzarse a trazar?

La teoría da respuestas exhaustivas a estas preguntas. Veamos algunos de los postulados de esta teoría.

Llamaremos «pares» a los puntos de la figura en que converge un número *par* de líneas, para diferenciarlos de los puntos «impares», a los cuales concurre un número *impar* de ellas.

Puede demostrarse (aunque no nos detengamos a hacerlo) que cualquiera que sea la figura, o no tendrá puntos impares o, si los tiene, serán dos, cuatro, seis o, en general, un número par de ellos. Si la figura *carece* de puntos impares, podrá dibujarse siempre de un solo trazo, empezando por cualquiera de sus puntos. De este tipo son las figs. 286, *1* y *5*.

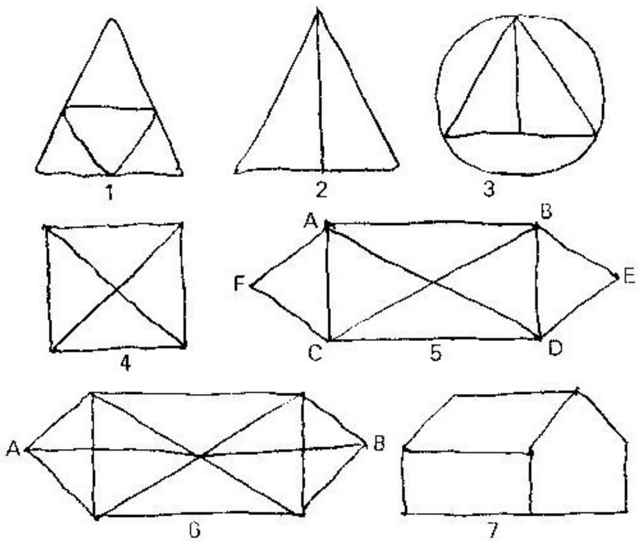


Figura 286

Si la figura tiene solamente dos puntos impares, se podrá dibujar de un solo trazo si se empieza por uno cualquiera de estos puntos impares. Se comprende fácilmente que el dibujo terminará en el segundo punto impar. A este tipo pertenecen las figuras *2*, *3* y *6*; la figura *6*, por ejemplo, debe empezarse a dibujar por el punto *A* o por el punto *B*.

Si la figura tiene más de un par de puntos impares, no puede dibujarse de un solo trazo. Las figuras *4* y *7*, que tienen dos pares de puntos impares, son de este último tipo.

Lo expuesto es suficiente para conocer las figuras que no pueden dibujarse de un solo trazo y las que pueden dibujarse, así como el punto desde el cual hay que comenzar a dibujarlas. El profesor W. Arens propone guiarse después por la regla: «Todas las líneas ya dibujadas de la figura dada deben considerarse inexistentes y, al elegir la siguiente línea a trazar, debe procurarse que la figura conserve su integridad (es decir, que no se descomponga), si esta línea también se quita del dibujo.»

Supongamos, por ejemplo, que la figura *5* comenzó a dibujarse siguiendo el camino $ABCD$. Si ahora se traza la línea DA, quedan sin dibujar dos figuras, la ACF y la BDE, que *no están ligadas* entre sí (la figura *5* se descompone). En este caso, después de terminar la figura AFC no podemos pasar a lafigura BDE, ya que no habrá líneas aún no dibujadas que las liguen entre sí. Por esto, una vez recorrido el camino $ABCD$, no se puede seguir adelante por la línea DA, sino que antes debe trazarse el camino $DBED$ y luego, por la línea DA que queda, pasar a la figura AFC.

Otros siete problemas

Dibuje sin levantar la pluma del papel las figuras siguientes:

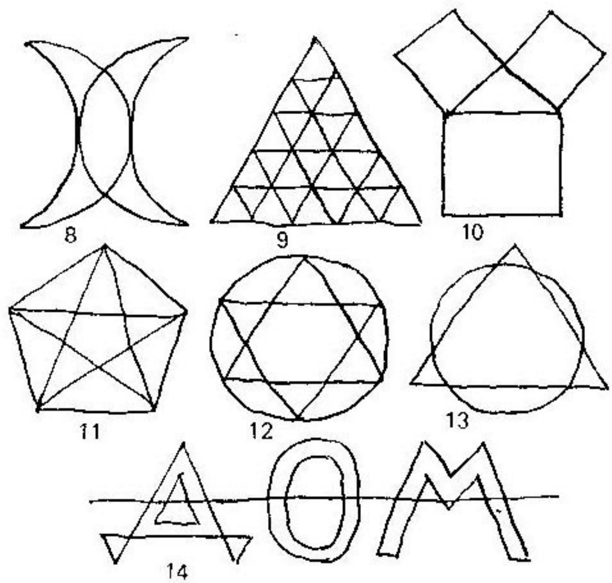


Figura 287

Los puentes de Leningrado

Para terminar proponemos un problema que sirve de tema a una de las muestras de la sala de matemáticas de la Casa de la Ciencia Recreativa. El problema consiste en pasar por los 17 puentes que unen entre sí las partes del territorio de Leningrado, que representa la figura, sin recorrer ninguno de ellos dos veces. A diferencia del problema de los puentes de Königsberg, el recorrido que se plantea esta vez es realizable y nuestro lector tiene ya los conocimientos teóricos necesarios para poder resolver este problema sin necesidad de ayuda.

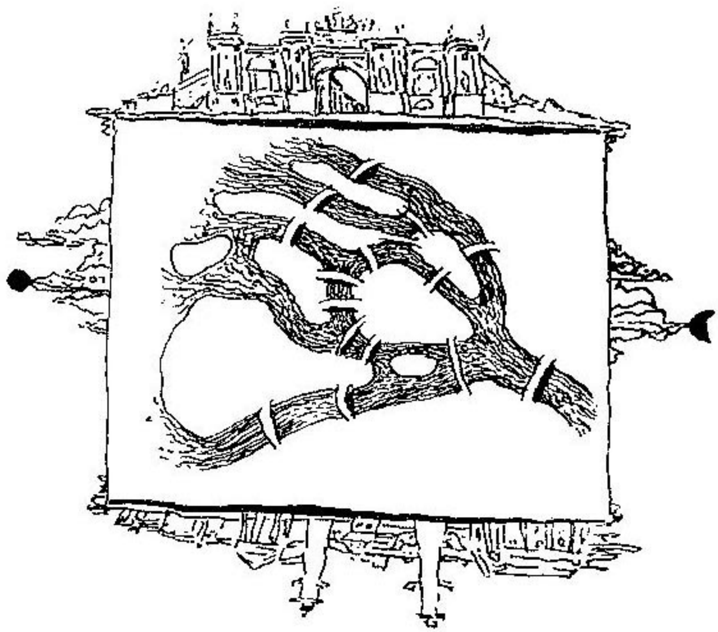
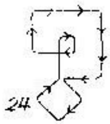


Figura 288

384-385



En las figs. 289 y 290 se dan las soluciones correspondientes a los problemas del capítulo «De un solo trazo».

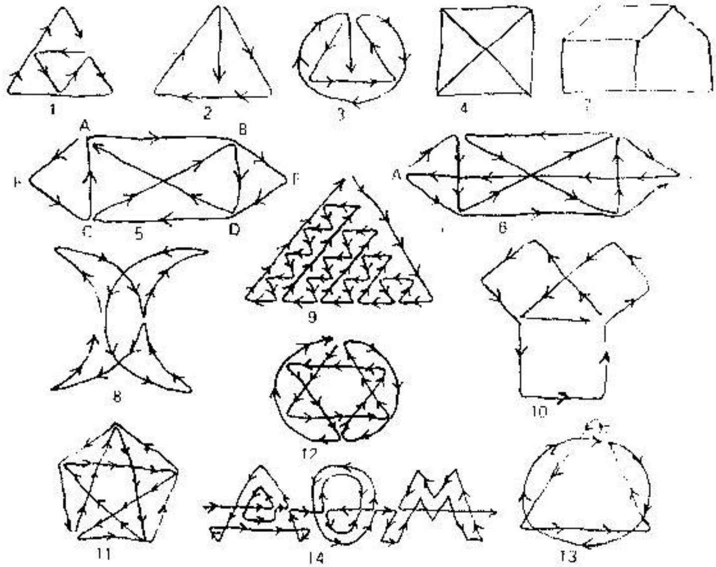


Figura 289

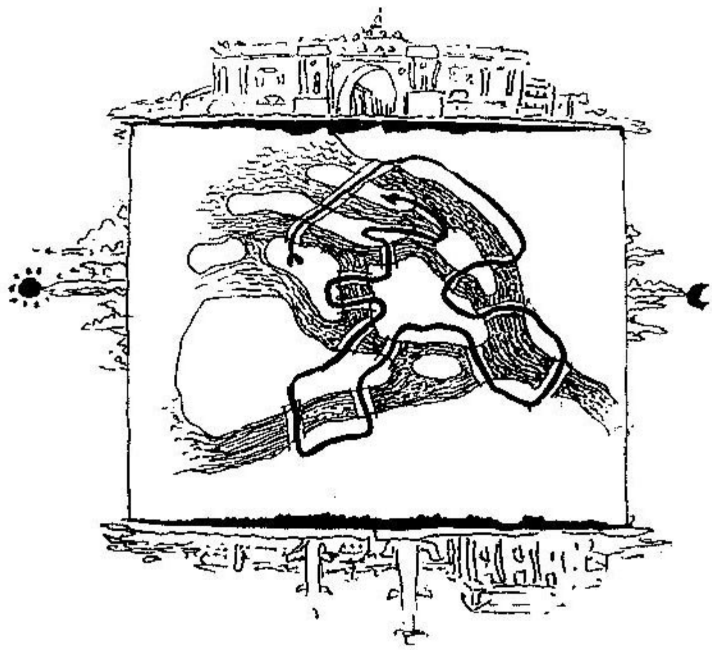


Figura 290

El carro

¿Por qué se desgasta más y se quema con más frecuencia el eje delantero del carro que el eje trasero?

El número de caras

He aquí una pregunta que sin duda parecerá a muchos demasiado ingenua o, al contrario, demasiado ingeniosa: ¿Cuántas caras tiene un lápiz hexagonal?

Antes de mirar la solución, recapacite acerca de la pregunta.

¿Qué representan estos dibujos?

Un giro desacostumbrado da a los objetos representados en la fig. 291 un aspecto raro, que hace difícil el reconocerlos. No obstante, procure imaginarse lo pintado

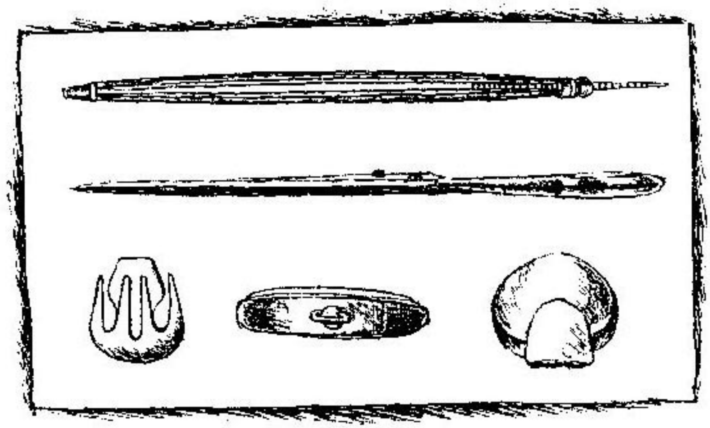


Figura 291

por el dibujante. Se trata de objetos de uso ordinario que usted conoce perfectamente.

Los vasos y los cuchillos

En una mesa hay tres vasos colocados de tal forma, que las distancias entre ellos son mayores que la longitud de cada uno de los cuchillos intercalados (fig. 292). A pesar de esto es necesario hacer, con los tres cuchillos, puentes que unan entre sí los tres vasos. Está claro que no se permite mover los vasos de sus sitios; tampo-

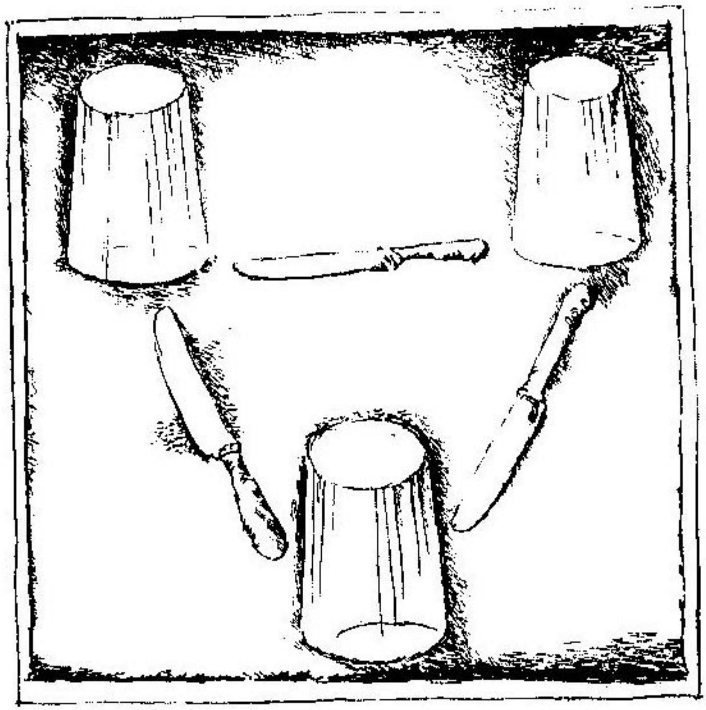


Figura 292

co se puede utilizar ninguna otra cosa además de los tres vasos y los tres cuchillos.

¿Podría usted hacer esto?

¿Cómo está hecho esto?

En la fig. 293 se ve un cubo hecho de dos trozos de madera machihembrados: el macho de la mitad superior entra en la hembra de la inferior. Pero fíjese en la forma y en la disposición de este machihembrado y diga cómo se las compuso el carpintero para unir las dos partes, porque cada mitad está hecha de un solo trozo de madera.

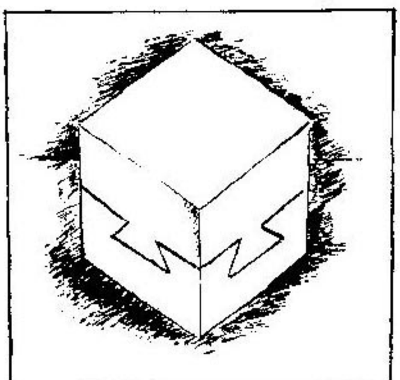


Figura 293

Un tapón para tres orificios

En una tabla (fig. 294) se han practicado seis filas de orificios, a razón de tres en cada fila. De un material cualquiera hay que hacer, para cada fila, *un* tapón que sirva para tapar los tres orificios.

Para la fila primera no es difícil hacer esto: está claro que puede utilizarse como tapón el tarugo representado en la figura.

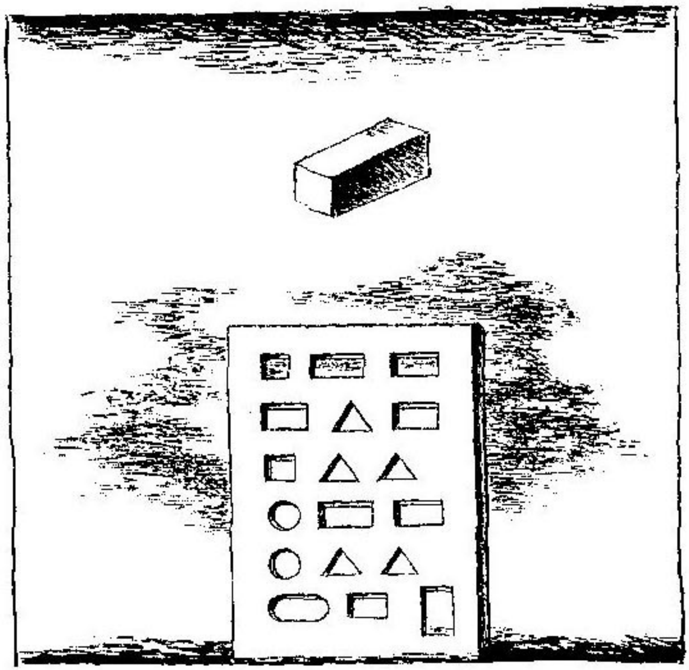


Figura 294

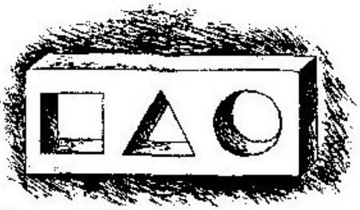


Figura 295

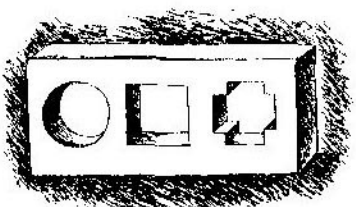


Figura 296

Figura 297

Idear la forma de los tapones para las otras cinco filas es algo más difícil; no obstante, estos problemas también puede resolverlos todo aquel que sepa algo de dibujo técnico: en este caso se trata, en esencia, de hacer una pieza a partir de sus tres proyecciones.

Hallar el tapón

He aquí una tablilla (fig. 295) con tres agujeros: uno cuadrado, otro rectangular y otro redondo.

¿Puede existir un tapón cuya forma sea tal que permita tapar estos tres agujeros?

Un segundo tapón

Si consiguió resolver el problema anterior, ¿no podría encontrar otro tapón para los orificios que se muestran en la fig. 296?

Un tercer tapón

Para terminar, aquí tiene otro problema del mismo tipo: ¿puede existir un tapón que sirva para los tres agujeros que se ven en la fig. 297?

Dos jarros

Un jarro es el doble de alto que otro, pero el segundo es $1^1/_2$ veces más ancho que el primero (fig. 298). ¿Cuál de ellos tiene más capacidad?

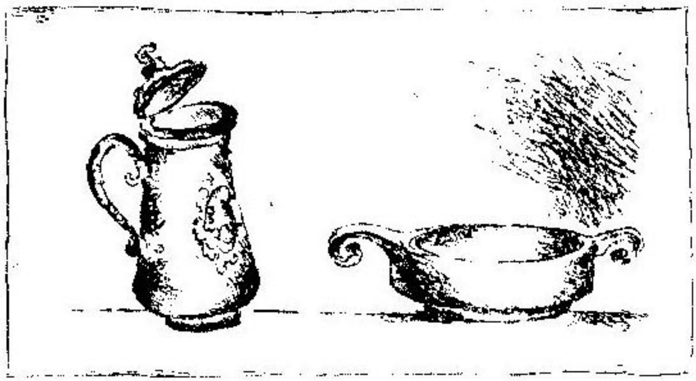


Figura 298

¿Cuántos vasos?

En estos anaqueles (fig. 299) hay vasijas de tres dimensiones, pero están colocadas de tal modo, que la capacidad total de las vasijas que hay en cada anaquel

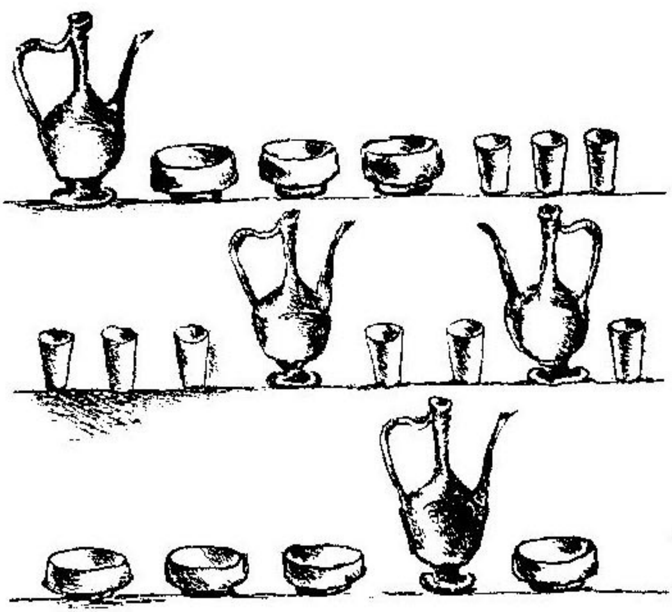


Figura 299

es la misma. La capacidad de la menor de las vasijas es un vaso. ¿Qué capacidad tienen las vasijas de los otros dos tamaños?

Dos cacerolas

Hay dos cacerolas de cobre de igual forma e idéntico espesor de las paredes. La capacidad de la primera es ocho veces mayor que la de la segunda.

¿Cuántas veces mayor es su peso?

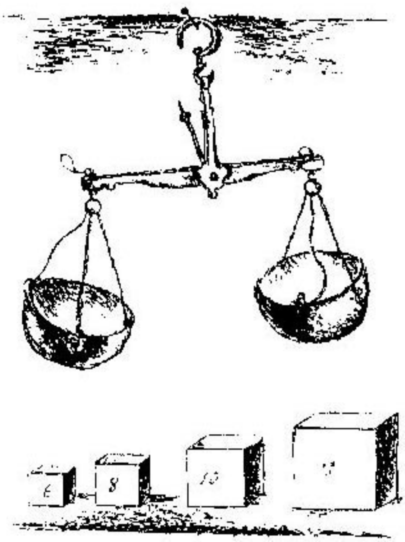


Figura 300

Cuatro cubos

De un mismo material se han hecho cuatro cubos macizos de alturas distintas (fig. 300), a saber: 6 cm, 8 cm, 10 cm y 12 cm. Hay que colocarlos en los platillos de una balanza de modo que éstos queden en equilibrio.

¿Qué cubo o cubos pondrá usted en un platillo y cuáles (o cuál) en el otro?

Hasta la mitad

En un barril abierto hay agua. Al parecer esta agua llena el barril hasta la mitad. Pero usted quiere saber si efectivamente está lleno el barril hasta la mitad o si tiene más o menos agua. A mano no tiene usted ni un palo ni nada que pueda servirle de instrumento para medir el barril.

¿Cómo podría usted convencerse de que el barril está lleno justamente hasta la mitad?

¿Qué pesa más?

Se tienen dos cajas cúbicas de dimensiones iguales (fig. 301). En la de la izquierda hay una gran esfera de hierro cuyo diámetro es igual a la altura de la caja. La de la derecha está llena de bolas de hierro pequeñas colocadas como se ve en la figura.

¿Qué caja pesa más?

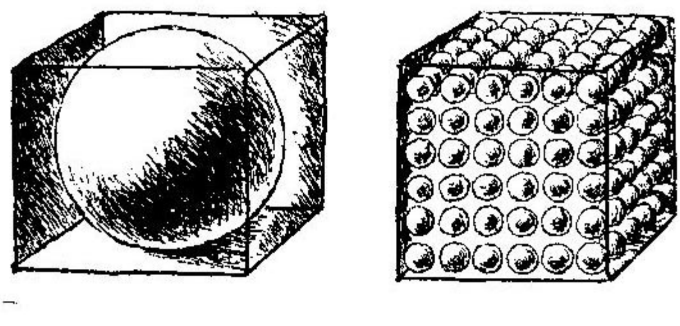


Figura 301

La mesa de tres patas

Existe la creencia de que una mesa de tres patas no cojea nunca, aunque sus patas tengan longitudes distintas.

¿Es verdad esto?

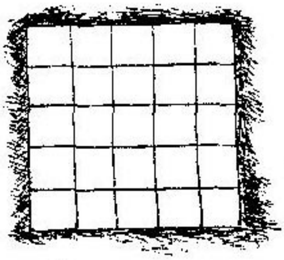


Figura 302

¿Cuántos rectángulos?

¿Cuántos rectángulos puede usted contar en esta figura (fig. 302)?

No se apresure a responder. Fíjese bien en que se pregunta no por el número de *cuadrados*, sino por el de rectángulos en general —grandes y pequeños— que pueden contarse en la figura.

El tablero de ajedrez

¿Cuántos cuadrados, en diversas posiciones, puede usted contar en un tablero de ajedrez?

El ladrillito

Un ladrillo ordinario pesa 4 kg.

¿Cuánto pesará un ladrillito de juguete, hecho del mismo material, si todas sus dimensiones son cuatro veces menores?

El gigante y el enano

¿Cuántas veces aproximadamente pesará más un gigante de 2 m de altura que un enano de 1 m?

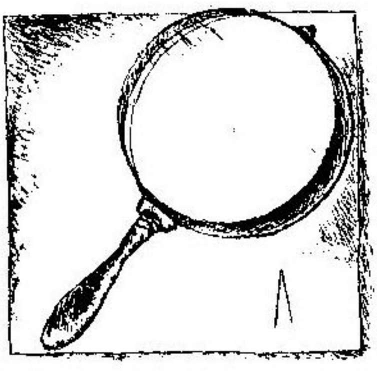


Figura 303

Por el ecuador

Si usted pudiera darle la vuelta a la Tierra por el ecuador, su coronilla describiría una trayectoria más larga que cada punto de sus talones.

¿Sería muy grande la diferencia entre ellas?

Visto con lupa

Un ángulo de $1\ {}^1/_2{}^\circ$ se mira con una lupa de cuatro aumentos.

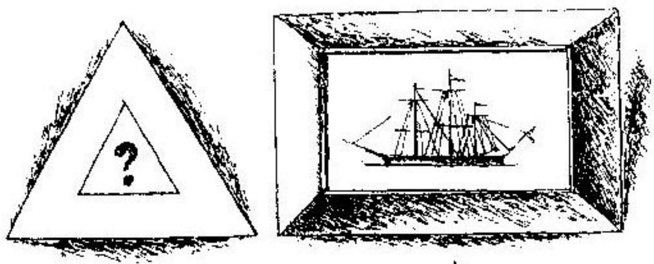
¿Qué magnitud aparente tendrá el ángulo (fig. 303)?

Figuras semejantes

Este problema se dedica a los que ya saben en qué consiste la semejanza geométrica. Hay que dar respuesta a las dos preguntas siguientes:

1. ¿Son semejantes los triángulos interno y externo de la figura 304, *a*?

2. ¿Son semejantes los cuadriláteros externo e interno del marco del cuadro (fig. 304, *b*)?



a b

Figura 304

La altura de la torre

En la ciudad en que usted vive hay una torre cuya altura desconoce. Usted tiene una tarjeta postal con la fotografía de dicha torre.

¿Cómo puede utilizarse esta fotografía para determinar la altura de la torre?

¿Qué longitud?

Calcule mentalmente qué longitud tendría una cinta formada por todos los cuadraditos milimétricos que caben en 1 m^2, puestos uno a continuación del otro y en contacto directo.

Del mismo tipo

Calcule mentalmente cuántos kilómetros de altura tendría una columna formada con todos los cubitos milimétricos que caben en 1 m^3, puestos uno encima de otro.

Azúcar

¿Qué pesa más, un vaso lleno de azúcar molido o el mismo vaso lleno de azúcar en terrones?

El camino de la mosca

En la pared interna de un tarro cilíndrico de vidrio se ve una gota de miel a 3 cm del borde superior de la vasija. Y en la pared externa, en el punto diametralmente opuesto a la gota de miel, se ha posado una mosca (fig. 305).

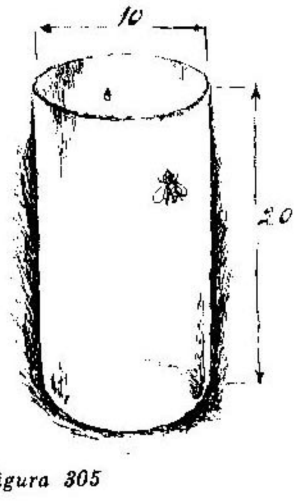


Figura 305

Indíquele a la mosca el camino más corto para llegar a la gota de miel.

La altura del tarro es igual a 20 cm; su diámetro, a 10 cm.

No confíe en que la misma mosca encontrará el camino más corto y así le ayudará a resolver el problema; para esto tendría que poseer la mosca unos conocimientos geométricos demasiado grandes para su cabeza.

El camino del escarabajo

Junto a la carretera hay un adoquín de granito de 30 cm de longitud, 20 cm de altura y 20 cm de anchura (fig. 306). En el punto *A* de dicho adoquín hay un

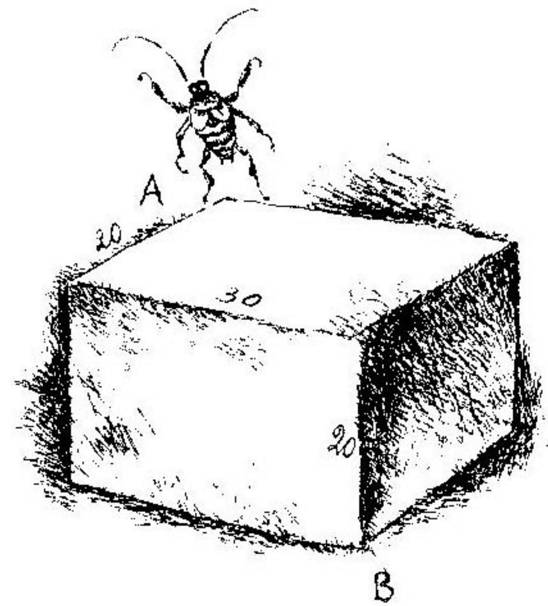


Figura 306

escarabajo que quiere ir por el camino más corto al ángulo *B*.

¿Por dónde pasa este camino más corto y cuál es su longitud?

El viaje del abejorro

Un abejorro emprende un largo viaje. Desde su nido paterno sale volando en línea recta hacia el sur, cruza un río y, finalmente, después de toda una hora de vuelo, se posa en una ladera cubierta de aromático trébol. Aquí permanece el abejorro media hora volando de flor en flor.

Ahora le conviene al abejorro visitar el huerto en que vio ayer unos groselleros en flor. Este huerto se halla al oeste de la ladera, y el abejorro se apresura a volar en línea recta hacia allá. Al cabo de $^3/_4$ de hora ya estaba en el huerto. Los groselleros estaban en plena floración y para poder libar en todos ellos necesitó el abejorro una hora y media.

Luego, sin desviarse hacia ningún lado, el abejorro se dirigió a su casa siguiendo el camino más corto.

¿Cuánto tiempo estuvo ausente el abejorro?

La fundación de Cartago

Acerca de la fundación de la antigua ciudad de Cartago existe la siguiente leyenda. Dido, hija del rey de Tiro, al perder a su esposo (asesinado por el hermano de Dido), huyó a Africa y desembarcó con muchos tirios en su costa norte. Aquí le compró al rey de Numidia tanta tierra «como podía delimitar una piel de toro». Cuando el trato quedó cerrado, Dido cortó la piel de toro a tiras muy estrechas y, gracias a esta estratagema, abarcó un territorio suficiente para construir una fortaleza. Así, según la leyenda, se creó el recinto fortificado de Cartago, en torno al cual se edificó después la ciudad.

Calcule qué área, según esta leyenda, podría ocupar la fortaleza, considerando que la piel de toro tenía 4 m^2 de superficie y que las tiras que Dido cortó de aquélla eran de 1 mm de anchura.

El carro

A primera vista parece que este problema no tiene nada que ver con la geometría. Pero en esto consiste precisamente el conocimiento de esta ciencia, en saber encontrar la base geométrica del problema en aquellos casos en que se halla oculta por detalles secundarios. En esencia, nuestro problema es indudablemente de geometría: sin saber geometría es imposible resolverlo.

Así, pues, ¿por qué se desgasta más el eje delantero del carro? Todos sabemos que las ruedas delanteras son menores que las traseras. En una misma distancia, un círculo pequeño da más vueltas que otro mayor; el círculo pequeño tiene la circunferencia menor y, por eso, entra más veces en la longitud dada. Ahora está claro que en todos los viajes del carro sus ruedas delanteras dan más vueltas que las traseras, y, como es natural, a mayor número de vueltas, mayor desgaste del eje.

El número de caras

Este problema, lejos de ser una broma, pone de manifiesto el error a que conduce el empleo de algunas palabras. Un lápiz hexagonal no tiene seis caras, como piensan muchos. El número total de sus caras, si no se le ha sacado punta, es ocho: seis laterales y dos pequeñas «frontales». Si tuviera en realidad seis caras, su forma sería muy distinta: parecería una varilla de sección cuadrangular.

La costumbre de contar en los prismas nada más que las caras laterales, olvidándose de las bases, es muy frecuente.

¿Qué representan estos dibujos?

Representan, bajo un giro desacostumbrado, los objetos siguientes: una navaja de afeitar, unas tijeras, un tenedor, un reloj de bolsillo y una cuchara. Cuando miramos un objeto cualquiera, vemos en realidad su proyección sobre el plano perpendicular al rayo visual. En nuestro caso se muestran no las proyecciones que estamos acostumbrados a ver, y esto basta para que el objeto parezca desconocido.

Los vasos y los cuchillos

Esto es fácil de conseguir poniendo los cuchillos como se ve en la fig. 307. Cada cuchillo apoya uno de sus extremos en un vaso y el otro, en un cuchillo, que a su vez también se apoya en otro cuchillo. Los cuchillos se sostienen entre sí.

¿Cómo está hecho esto?

El secreto es bien sencillo, como puede verse en la fig. 308.

Todo consiste en que tanto los salientes como los entrantes (machos y hembras) no se cruzan, como parece al mirar el objeto acabado, sino que son paralelos entre sí y tienen dirección oblicua. Estos salientes son muy fáciles de introducir en las ranuras correspondientes.

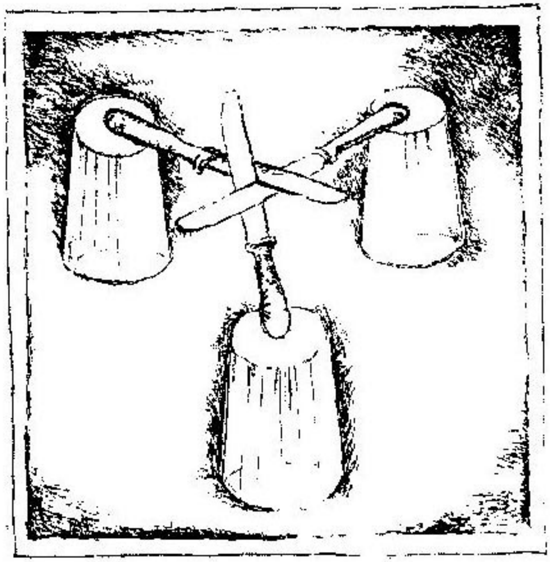


Figura 307

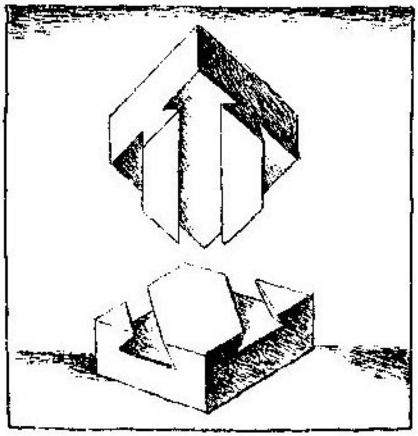


Figura 308

Un tapón para tres orificios

Los tapones necesarios para el fin propuesto se muestran en la fig. 309.

Hallar el tapón

El tapón que hace falta en este caso, existe. Tiene la forma que se ve en la fig. 310. Es fácil comprobar que un tapón así puede tapar el agujero cuadrado, el triangular y el redondo.

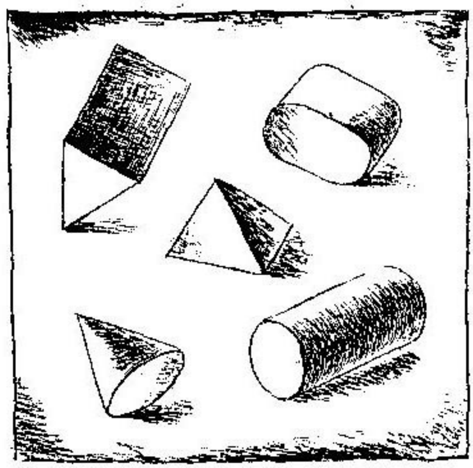


Figura 309

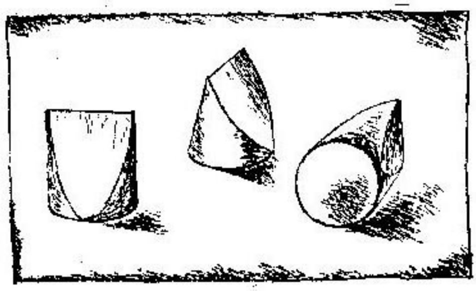


Figura 310

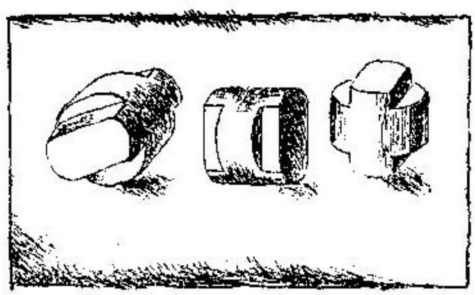


Figura 311

Un segundo tapón

También existe el tapón necesario para los tres orificios representados en la fig. 311: uno redondo, otro cuadrado y un tercero en forma de cruz. El tapón se representa en las tres posiciones.

Un tercer tapón

Este tapón también lo hay. En la fig. 312 puede verlo usted por tres de sus lados.

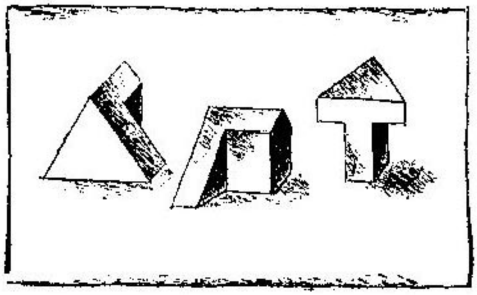


Figura 312

Problemas como éstos tienen que resolver con frecuencia los delineantes, cuando por tres proyecciones de una pieza cualquiera de una máquina, tienen que determinar su forma.

Dos jarros

El jarro cuya anchura es $1^1/_2$ veces mayor, si tuviera la misma altura que el otro, tendría una capacidad $(1^1/_2)^2$, es decir, $2^1/_4$ veces mayor. Y como su altura sólo es dos veces menor, su capacidad, en fin de cuentas, es mayor que la del jarro más alto.

¿Cuántos vasos?

Comparando el primer anaquel con el tercero, notamos que se diferencian entre sí en lo siguiente: en el tercer anaquel hay de más una vasija de tamaño medio, pero, en cambio, hay tres vasijas pequeñas menos. Y como la capacidad total de las vasijas de cada anaquel es la misma, es evidente que la capacidad de una vasija de tamaño medio es igual a la de tres pequeñas. Así, pues, la vasija de tamaño medio tiene la capacidad de tres vasos. Nos queda por determinar la capacidad de la vasija mayor. Sustituyendo en el primer anaquel las vasijas de tamaño medio por el número correspondiente de vasos, obtenemos una vasija grande y 12 vasos.

Comparando esto con el segundo anaquel comprendemos que la capacidad de una vasija grande es igual a la de seis vasos.

Dos cacerolas

Las dos cacerolas son cuerpos geométricamente semejantes. Si la cacerola grande tiene una capacidad ocho veces mayor, todas sus dimensiones lineales serán dos veces mayores: será dos veces más alta y dos veces más ancha en ambas direcciones. Pero si es el doble de alta y de ancha, su superficie será 2×2, es decir, cuatro veces mayor, porque las superficies de los cuerpos semejantes guardan entre sí la misma relación que los cuadrados de sus dimensiones lineales. Si el espesor de las paredes de las cacerolas es el mismo, el peso de éstas depende de la magnitud de su superficie. De aquí se deduce la respuesta a la pregunta que plantea el problema: la cacerola grande pesa *cuatro veces* más.

Cuatro cubos

En un platillo hay que colocar los tres cubos menores, y en el otro, el grande. No es difícil cerciorarse de que la balanza debe permanecer en equilibrio. Para esto no hay más que demostrar que la suma de los volúmenes de los tres cubos menores es igual al volumen del mayor. Esto se deduce de la igualdad

$$6^3 + 8^3 + 10^3 = 12^3,$$

es decir,

$$216 + 512 + 1000 = 1728.$$

Hasta la mitad

El procedimiento más sencillo es inclinar el barril de modo que el agua llegue hasta el borde (fig. 313). Si en estas condiciones se ve, aunque sólo sea un poco, el fondo del barril, quiere decir que el agua no llegaba a la mitad. Si, por el contrario, el fondo

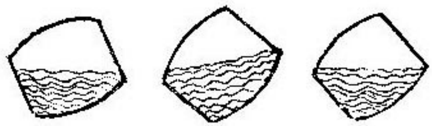


Figura 313

queda por debajo del nivel del agua, está claro que ésta llenaba más de la mitad del barril. Y, finalmente, si el borde superior del fondo se halla precisamente al nivel del agua, ésta ocupa exactamente la mitad del barril.

¿Qué pesa más?

El cubo de la derecha nos lo figuramos formado por cubos pequeños, en cada uno de los cuales hay una bola. Se ve entonces fácilmente que la esfera grande ocupa una fracción del cubo entero igual a la que en un cubo pequeño ocupa una bola. El número de bolas y de cubos pequeños no es difícil de calcular: $6 \times 6 \times 6 = 216$. El volumen de 216 bolas constituye la misma fracción de 216 cubos pequeños que una bola pequeña de un cubo pequeño, es decir, la misma que la esfera grande constituye del cubo grande. De aquí se deduce claramente que en ambas cajas hay la misma cantidad de metal y que, por consiguiente, deben pesar lo mismo.

La mesa de tres patas

Una mesa de tres patas siempre puede tocar el suelo con los extremos de las tres, porque por cada tres puntos del espacio puede pasar un plano, y sólo uno; por esta razón no cojean las mesas de tres patas. Como ve, se trata de una razón puramente geométrica y no física.

Por esto es tan cómodo usar trípodes en los instrumentos de agrimensura y en las cámaras fotográficas. Una cuarta pata no daría más estabilidad al soporte, sino al contrario, haría que cada vez fuera necesario tomar medidas para que no cojeara.

¿Cuántos rectángulos?

En esta figura pueden contarse 225 rectángulos en diversas posiciones.

El tablero de ajedrez

En un tablero de ajedrez hay representados no 64 cuadrados, sino muchos más: porque además de los cuadrados blancos y negros pequeños, hay en ella cuadrados bicolores constituidos por 4, 9, 16, 25, 36, 49 y 64 cuadraditos simples. Teniendo en cuenta todos ellos, resultan:

cuadraditos simples				64
cuadrados	formados	por 4	cuadraditos	49
»	»	» 9	»	36
»	»	» 16	»	25
»	»	» 25	»	16
»	»	» 36	»	9
»	»	» 49	»	4
»	»	» 64	»	1
			Total	204

Así, pues, en un tablero de ajedrez hay 204 cuadrados de distinto tamaño, diversamente colocados.

El ladrillito

La respuesta que supone que el ladrillito de juguete pesa 1 kg, es decir, nada más que cuatro veces menos que el ordinario, encierra un gran error, ya que este ladrillito no sólo es cuatro veces *más corto*, sino también cuatro veces *más estrecho* y cuatro veces *más bajo*; por lo tanto, su volumen y su peso serán $4 \times 4 \times 4 = 64$ veces menores.

Por consiguiente, la respuesta concreta será: el ladrillito de juguete pesa $4000 : 64 = 62{,}5$ g.

El gigante y el enano

Usted ya está preparado para poder dar una solución correcta a este problema. Como las figuras del cuerpo humano son aproximadamente semejantes, a una talla doble del individuo le corresponderá un volumen no dos veces mayor, sino ocho. Por lo tanto, nuestro gigante pesará unas ocho veces más que el enano.

El gigante más alto que se ha conocido era alsaciano y medía 275 cm, es decir, todo un metro más que una persona de estatura mediana. El enano más pequeño tenía menos de 40 cm de altura, o sea, era aproximadamente siete veces más bajo que el enorme alsaciano. Por esto, si en el platillo de una balanza se pusiera al gigante alsaciano, en el otro platillo habría que colocar, para lograr el equilibrio, $7 \times 7 \times 7 = 343$ enanos, es decir, toda una multitud.

Por el ecuador

Considerando que la estatura de la persona es igual a 175 cm y llamando R al radio de la Tierra, tenemos: $2 \times 3{,}14 \times (R + 175) - 2 \times 3{,}14 \times R = 2 \times 3 \times 175 = 1100$ cm, es decir, cerca de 11 m. Pero lo sorprendente es que este resultado no depende en absoluto del radio de la esfera y, por consiguiente, es igual tanto para la enorme esfera del sol como para una bola pequeña.

Visto con lupa

Si usted cree que nuestro ángulo visto con lupa tiene $1^1/_2 \times 4 = 6°$, se equivoca. El valor de un ángulo no aumenta cuando se mira con lupa. Es verdad que el arco que

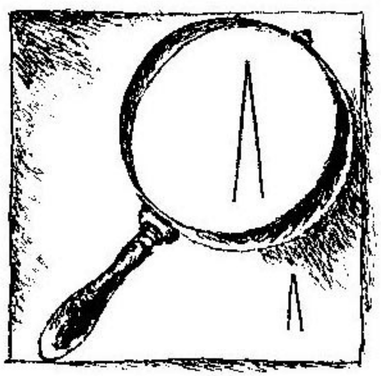


Figura 314

mide dicho ángulo aumenta indudablemente, pero el radio de este arco aumenta la misma cantidad de veces que él, de modo que el valor del ángulo central permanece invariable. La fig. 314 aclara lo dicho.

Figuras semejantes

A las dos preguntas planteadas en el problema suelen responder con frecuencia afirmativamente. Pero en realidad sólo son semejantes los triángulos; en cambio, los cuadriláteros exterior e interior del marco, en general, no son semejantes. Para que dos triángulos sean semejantes basta que sus ángulos sean iguales, y como los lados del triángulo interior son paralelos a los del exterior, estas figuras son semejantes. Pero para que los demás polígonos sean semejantes no basta la igualdad de los ángulos (o, lo que es lo mismo, el paralelismo de sus lados), es necesario además que los *lados* de los polígonos sean *proporcionales*. En el caso de los cuadriláteros exterior e interior de un marco sólo se da esta condición si son cuadrados (o, en general, rombos). En todos los demás casos los lados del cuadrilátero exterior no son proporcionales a los lados del cuadrilátero interior y, por consiguiente, las figuras no son semejantes. La inexistencia de semejanza se hace evidente cuando los marcos son rectangulares y los listones que lo forman son

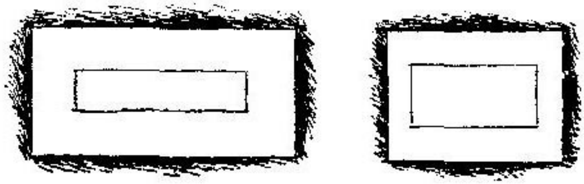


Figura 315

anchos, como en la fig. 315. En el marco de la izquierda, los lados exteriores se relacionan entre sí como 2 : 1, mientras que los interiores, como 4 : 1. En el marco de la derecha, entre los lados exteriores existe la relación 4 : 3, y entre los interiores, 2 : 1.

La altura de la torre

Para poder determinar por medio de la fotografía la altura de la torre, es necesario, en primer lugar, medir lo más exactamente posible la altura y la longitud de la base de su imagen fotográfica. Supongamos que la altura de la imagen sea 95 mm y la longitud de su base 19 mm. En este caso, mide usted la longitud de la base de la torre real; supongamos que resulta ser igual a 14 m.

Después de esto razonaremos así:

La fotografía de la torre y la configuración de su original son semejantes geométricamente. Por consiguiente, la altura de la torre real será tantas veces mayor que la longitud de su base, como veces mayor sea la altura de la imagen fotográfica que la longitud de su base. Esta segunda relación es igual a 95 : 19, es decir, 5; de donde se deduce que la altura de la torre es cinco veces mayor que la longitud de su base e igual en realidad a $14 \times 5 = 70$ m.

Así, pues, la altura de la torre de la ciudad es de 70 m.

Conviene advertir, no obstante, que para determinar la altura de una torre no sirve cualquier fotografía, sino únicamente aquellas en las cuales no se hayan alterado las proporciones del original, como suele ocurrir en las hechas por fotógrafos poco duchos.

¿Qué longitud?

En un metro cuadrado hay mil veces mil milímetros cuadrados. Cada mil milímetros cuadrados, puestos uno a continuación de otro sin interrupción, constituyen 1 m; mil veces mil constituyen 1000 m, es decir, 1 km, por lo tanto, la cinta tendría un kilómetro de longitud.

Del mismo tipo

La respuesta llama la atención: la columna tendría... 1000 km de altura.

Hagamos el cálculo mental. En 1 m^3 hay $1000 \times 1000 \times 1000$ milímetros cúbicos. Cada 1000 milímetros cúbicos, puestos uno sobre otro, da una columna de 1 m. Mil veces más milímetros darán una columna de $1000 \text{ m} = 1$ km. Pero como tenemos aún 1000 veces más milímetros cúbicos, constituirán en total una columna de 1000 km.

Azúcar

Haciendo un pequeño esfuerzo mental, este problema, que parece muy difícil, se resuelve con bastante facilidad. Supongamos para simplificar que los trozos del azúcar en terrones tienen un diámetro 100 veces mayor que los granos del azúcar molida. Figurémonos ahora que todos los granos de azúcar aumentarán 100 veces de diámetro, junto con el vaso en que se encuentran. La capacidad del vaso aumentaría en $100 \times \times 100 \times 100$, es decir, un millón de veces; la misma cantidad de veces aumentaría el peso del azúcar contenida en él. Llenemos mentalmente un vaso normal de esta azúcar molida aumentada, es decir, echemos en él la millonésima parte del contenido del vaso gigante. La cantidad echada pesará, claro está, lo mismo que pesa un vaso ordinario de azúcar molida común. Pero, ¿qué es de por sí el azúcar molida aumentada que hemos echado? Ni más ni menos que azúcar en terrón. Por lo tanto, en un vaso cabe la misma cantidad en peso de azúcar en terrones que de azúcar molida.

Si en lugar del aumento de 100 veces hubiéramos supuesto un aumento de 60 veces u otro cualquiera, el resultado hubiera sido el mismo. La esencia del razonamiento consiste en que los trozos de azúcar en terrones se consideran como cuerpos semejantes geométricamente a los granos de azúcar molida y colocados de un modo también semejante. Esta suposición no es rigurosamente correcta, pero se aproxima bastante a la realidad (si se trata de azúcar en terrones, pero no de cortadillo).

El camino de la mosca

Para resolver este problema desarrollamos la superficie lateral del tarro cilíndrico en una figura plana; obtenemos un rectángulo (fig. 316, *a*) de 20 cm de altura, cuya base es igual a la circunferencia del tarro, es decir, a $10 \times 3^1/_7 = 31^1/_2$ cm (aproximada-

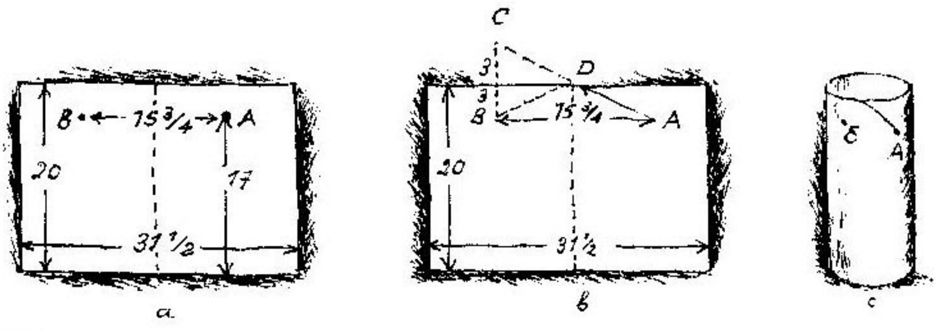


Figura 316

mente). Señalamos en este rectángulo las posiciones que ocupan la mosca y la gota de miel. La mosca está en el punto A, a 17 cm de la base; la gota, en el punto B, a la misma altura y la distancia de una semicircunferencia de tarro con respecto a A, es decir, a $15^3/_4$ cm.

Para hallar ahora el punto en que la mosca debe pasar el borde del tarro, procedemos del modo siguiente. Desde el punto B (fig. 316, *b*) trazamos una recta perpendicular al lado superior del rectángulo y la prolongamos hasta una distancia igual: obtenemos el punto C. Este punto se une por medio de una recta con A. El punto D será el lugar por donde la mosca debe pasar al otro lado del tarro, y el camino ADB resulta ser el más corto.

Una vez hallado el camino más corto en el rectángulo desarrollado, lo volvemos a la forma cilíndrica y, de este modo, sabemos el camino que debe seguir la mosca para llegar antes a la gota de miel (fig. 316, c).

El camino del escarabajo

El camino es fácil de encontrar, si mentalmente hacemos girar la cara superior del adoquín, de forma que quede en el mismo plano que la cara delantera (fig. 317). Entonces es evidente que el camino más corto es la línea recta que une A y B. ¿Qué longitud

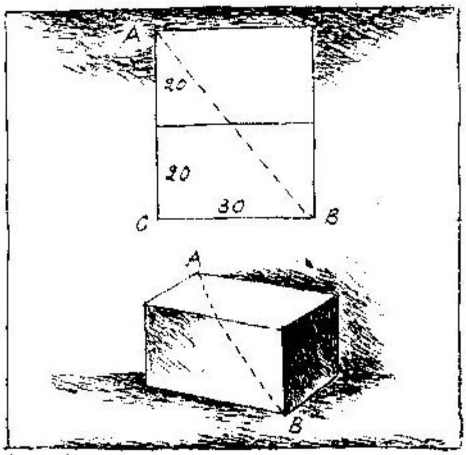


Figura 317

tiene este camino? Tenemos el triángulo rectángulo ABC, en el cual $AC = 40$ cm y $CB = 30$ cm. Por el teorema de Pitágoras, el tercer lado, AB, deberá ser igual a 50 cm, ya que $30^2 + 40^2 = 50^2$.

Así, pues, el camino más corto es $AB = 50$ cm.

El viaje del abejorro

El problema se resolvería muy fácilmente si se dijera el tiempo que tardó el abejorro en llegar volando desde el huerto hasta su nido. Esto no se dice en el problema, pero la geometría puede ayudarnos a saberlo.

Dibujemos el recorrido del abejorro. Sabemos que al principio voló «en línea recta hacia el sur» durante 60 minutos. Después voló 45 minutos «hacia el oeste», es decir, formando un ángulo recto con su camino anterior. Y desde allí volvió a su casa siguiendo el «camino más corto», es decir, una línea recta. Obtenemos el triángulo rectángulo ABC, del cual conocemos los dos catetos AB y BC, y tenemos que hallar el tercer lado, o sea, la hipotenusa AC.

La geometría enseña que si una cantidad cualquiera está contenida tres veces en un cateto y cuatro en el otro, en el tercer lado del triángulo, o sea, en la hipotenusa, esta misma cantidad estará contenida cinco veces exactamente.

Por ejemplo, si los catetos de un triángulo son iguales respectivamente a 3 y 4 m, su hipotenusa será igual a 5 m; si los catetos tienen 9 y 12 km, el tercer lado tendrá 15 km, y así sucesivamente. En nuestro caso un cateto equivale a 3 × 15 minutos de

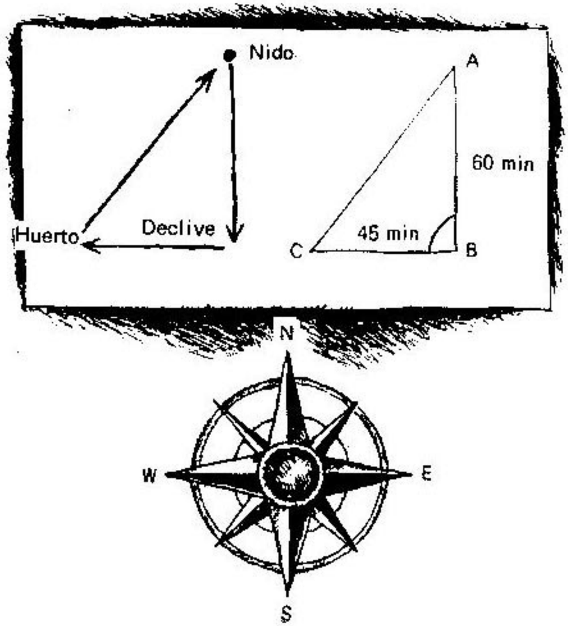


Figura 318

camino, el otro, a 4 × 15; por lo tanto, la hipotenusa $AC = 5 \times 15$ minutos de camino. De este modo hemos sabido que desde el huerto a su nido voló el abejorro 75 minutos, es decir, $1^1/_4$ horas.

Ahora ya es fácil calcular el tiempo que estuvo ausente el abejorro. En sus vuelos tardó:

$$1 \text{ hora} + {}^3/_4 \text{ de hora} + 1^1/_4 \text{ horas} = 3 \text{ horas.}$$

En sus paradas se entretuvo:

$$^1/_2 + 1^1/_2 \text{ horas} = 2 \text{ horas.}$$

En total: 3 horas + 2 horas = 5 horas.

La fundación de Cartago

Si el área de una piel de toro es igual a 4 m² ó 4 millones de mm² y la anchura de la tira es 1 mm, la longitud total de la correa cortada (que es de suponer que Dido la cortase en espiral) sería 4 millones de mm, o 4000 m, es decir, 4 km. Con esta correa se puede rodear una parcela cuadrada de 1 km² o una parcela redonda de 1,3 km².

Medición del camino por los pasos

Una regla graduada o una cinta métrica no siempre se tiene a mano, conviene por eso saber pasar sin ellas aunque sea aproximadamente. Las distancias más o menos largas, como, por ejemplo, las que se recorren durante las excursiones, lo más fácil es medirlas por pasos. Para esto hay que saber la longitud de sus pasos y saber contarlos. Está claro que los pasos no son siempre iguales: podemos andar con pasos cortos y podemos también, si queremos, andar con pasos largos. Pero de ordinario andamos con pasos de longitud aproximadamente igual, y conociendo su longitud media, pueden medirse las distancias por pasos sin cometer gran error.

Para conocer la longitud del paso medio hay que medir la longitud de muchos pasos juntos y de aquí calcular la longitud de uno. Para esto, como es natural, no puede prescindirse de una cinta métrica o de un cordón.

Tienda la cinta en un sitio liso y mida una distancia de 20 m. Trace esta línea sobre el terreno y quite la cinta. Ahora recorra esta línea andando normalmente y cuente el número de pasos que da. Puede ocurrir que su paso no entre un número entero de veces en la longitud medida. En este caso, si el resto del camino es menor que la mitad de la longitud de un paso, se puede despreciar; si es mayor que la mitad de dicha longitud, el resto se considera como un paso entero. Dividiendo la longitud total, 20 m, por el número de pasos, se obtiene la longitud media de un paso. Este número debe recordarse para, en caso de necesidad, emplearlo en las mediciones.

Para no equivocarse al contar los pasos, sobre todo en las distancias largas, se puede proceder del modo siguiente. Los pasos se cuentan solamente hasta 10; al llegar a este número se encoge un dedo de la mano izquierda. Cuando todos los dedos de la mano izquierda ya se han encogido, es decir, cuando se ha recorrido 50 pasos, se encoge un dedo de la mano derecha. Así se pueden contar hasta 250 pasos, después de lo cual se empieza de nuevo, teniendo cuidado de recordar cuantas veces se encogieron todos los dedos de la mano derecha. Si, por ejemplo, después de recorrer cierta distancia ha encogido usted dos veces todos los dedos de la mano derecha y al final del camino tiene usted tres dedos encogidos en la mano derecha y cuatro en la izquierda, habrá dado usted

$$2 \times 250 + 3 \times 350 + 4 \times 10 = 690 \text{ pasos.}$$

A esto hay que añadir los pasos que dio después de encoger por última vez un dedo de la mano izquierda.

Aquí conviene dar a conocer la antigua regla siguiente: la longitud del paso medio de una persona adulta es igual a la mitad de la distancia que hay desde el suelo hasta sus ojos.

Otra antigua regla práctica se refiere a la *velocidad* con que se anda: una persona recorre en una hora tantos kilómetros como pasos da en 3 segundos. Es fácil demostrar que esta regla sólo es cierta para una longitud determinada del paso, que además resulta ser bastante largo. En efecto: llamemos x m a la longitud del paso y n al número de pasos que se dan en 3 segundos. En este caso el peatón recorrerá en 3 segundos nx m y en una hora (3600 segundos), 1200 nx m, ó 1,2 nx km. Para que este camino recorrido sea igual al número de pasos dados en 3 segundos, deberá existir la igualdad: $1{,}2\ nx = n$, ó $1{,}2\ x = 1$.

De donde $x = 0{,}83$ m.

Si es cierta la regla anterior acerca de la dependencia entre la longitud del paso y la estatura de la persona. la segunda regla, que acabamos de considerar, se justifica únicamente para las personas de estatura mediana, es decir, de cerca de 175 cm.

Una escala viva

Para medir objetos de magnitudes medianas, si no se tienen a mano un metro o una cinta métrica, se puede hacer lo siguiente. Hay que tensar una cuerda o medir con un palo, la distancia desde el extremo de un brazo extendido horizontalmente hasta el hombro opuesto (fig. 319), en un hombre adulto esto es aproximadamente igual a la longitud de un metro. Otro procedimiento de obtener la longitud aproximada del metro consiste en tomar sobre una línea recta seis «cuartas», es decir, seis distancias entre los extremos de los dedos pulgar e índice abiertos lo más posible (fig. 320, *a*).

Esta última indicación nos conduce al arte de medir a «mano limpia»; para esto sólo es necesario medir previamente los elementos de nuestra propia mano y recordar bien los resultados de estas mediciones.

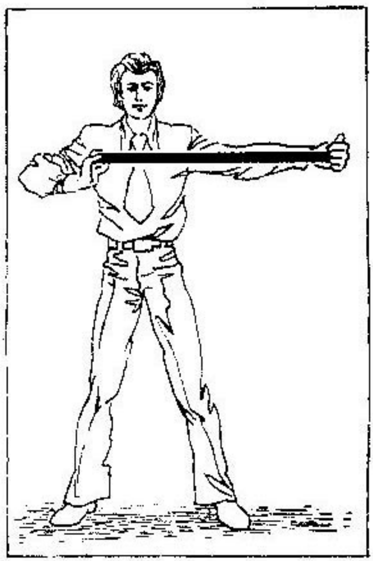


Figura 319

¿Qué hay que medir en la mano? En primer lugar, la anchura de la palma, como muestra la fig. 320, *b*.

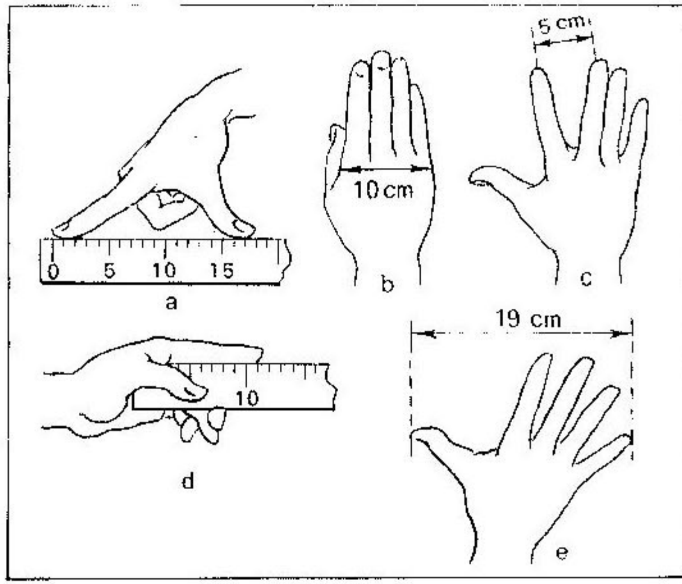


Figura 220

En un hombre adulto esta magnitud es igual a 10 cm, la suya puede ser menor, y usted debe saber en cuánto es menor precisamente. Después debe medir la distancia entre las puntas de sus dedos corazón e índice cuando están separados lo más posible (fig. 320, *c*). También conviene saber la longitud de su dedo índice, desde la base del dedo pulgar, como se indica en la fig. 320, *d*. Y, finalmente, mida la distancia que hay entre los extremos de su dedo pulgar y meñique cuando están lo más abiertos que sea posible, como en la fig. 320, *e*.

Utilizando esta «escala viva» podrá usted medir aproximadamente objetos pequeños.

Mediciones con monedas [1])

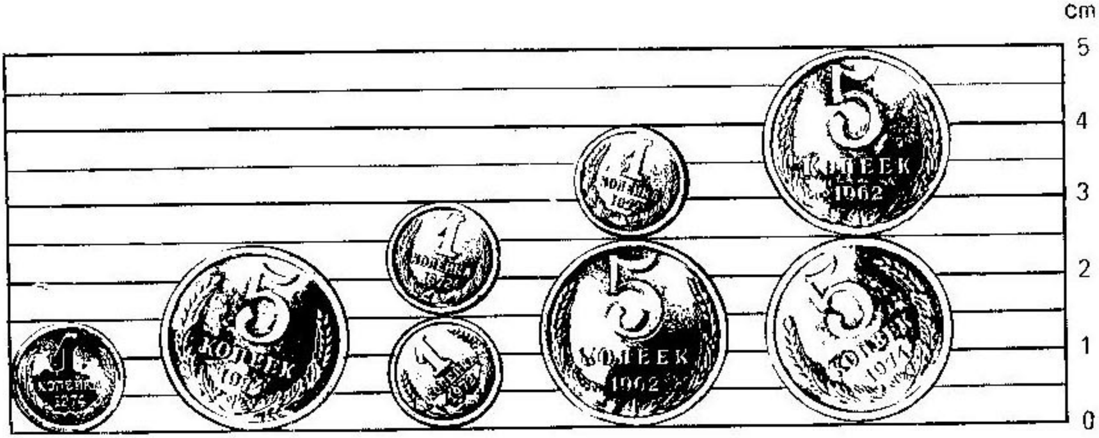
Un buen servicio pueden prestar las monedas de cuño moderno. Son pocos los que saben que el diámetro de la moneda de una copeika es igual a $1^1/_2$ cm y que el de la de cinco copeikas es $2^1/_2$ cm, de modo

[1]) Aquí se dan los diámetros de las monedas soviéticas. El lector debe medir los de las monedas de su país, hacer una tabla y aprenderse de memoria las combinaciones más importantes. (*N. del Tr.*)

que puestas una al lado de otra estas dos monedas miden 4 cm (fig. 321). Por lo tanto, si tiene usted varias monedas de cobre podrá medir con suficiente precisión las siguientes longitudes:

Con la moneda de 1 copeika	$1^1/_2$ cm
» » » » 5 copeikas	$2^1/_2$ »
» 2 monedas de 1 copeika	3 »
» 1 moneda de 5 y 1 de 1 copeika	4 »
» 2 monedas de 5 copeikas etc.	5 »

Si del diámetro de una moneda de 5 copeikas se resta el de una moneda de 1 copeika, se obtiene exactamente 1 cm.



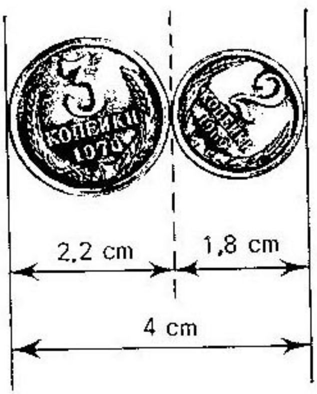


Figura ***321***

Si no tiene usted monedas de 5 ni de 1 copeika, sino solamente de 2 y de 3 copeikas, también éstas pueden sacarle de un apuro si recuerda con seguridad que estas dos monedas puestas una al lado de la otra miden 4 cm. Doblando por la mitad una tira de papel de 4 cm de largo y volviéndola luego a doblar otra vez por la mitad, tendrá usted una cinta de 4 cm graduada en cm [1]).

Como puede ver, con cierta preparación y un poco de ingenio pueden hacerse mediciones útiles en la práctica sin necesidad de regla graduada.

[1]) El diámetro de la moneda de 15 copeikas es aproximadamente igual a 2 cm, pero sólo aproximadamente, porque el diámetro verdadero de esta moneda es 1,956 mm. Las dimensiones antes indicadas de las monedas de cobre son, en cambio, exactas. Con un pie de rey puede comprobarse fácilmente que esto es así.

A esto puede añadirse que las monedas de cobre (bronce) pueden servir también de pesas en caso de necesidad. Las monedas nuevas (sin desgastar) de cobre pesan tantos gramos como valor en copeikas tienen, es decir, la moneda de 1 copeika pesa 1 g, la de 2 copeikas, 2 g y así sucesivamente. El peso de las monedas usadas se diferencia de un modo insignificante de estas normas. Como de ordinario no suelen tenerse a mano pesas pequeñas de 1—10 g, el conocimiento de las relaciones que acabamos de mencionar puede ser de gran utilidad.

El palito que desaparece

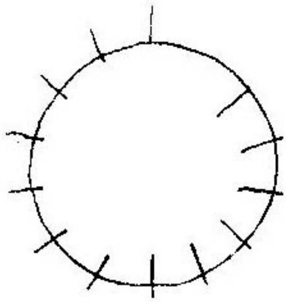


Figura 322

Copie cuidadosamente en un papel aparte el dibujo representado en la fig. 322. Córtelo con unas tijeras siguiendo la circunferencia, y, después, gire el círculo cortado en sentido contrario al de las agujas del reloj, de manera que la parte cortada de cada palito quede enfrente del trozo restante del palito vecino. Al hacer esto ocurre una metamorfosis extraña: en vez de 13 palitos, en la figura sólo quedan 12. Uno de los palitos desaparece inesperadamente. ¿Dónde se mete? Cuando el disco se hace girar en sentido contrario, vuelve a aparecer el palito que desapareció. ¿De dónde sale?

Un nudo misterioso

Pasemos ahora a los trucos que se hacen no con números, sino con objetos.

He aquí un truco interesante con el que podrá maravillar no poco a sus compañeros.

Coja un cordel de 30 cm, de longitud aproximadamente (fig. 323) y haga en él un nudo flojo (sin apretar)

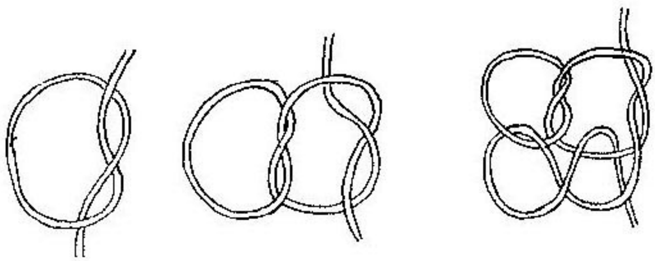


Figura 323

cómo el que se ve en el dibujo de la izquierda. Añádale a este nudo otro (véase el dibujo siguiente). Usted pensará, claro está, que tirando ahora de los extremos del cordel resultará un doble nudo seguro. Pero aguarde un poco: vamos a intrincar aún más nuestro nudo haciendo pasar uno de los extremos del cordel por ambas lazadas, como muestra el dibujo de la derecha.

Con esto terminan los preparativos; puede pasar a la parte principal del truco. Sujete el cordel por uno de sus extremos y dígale a uno de sus compañeros que tire del otro. Resulta algo que ni usted ni él esperaban: en vez de un nudo complejo y enredado, queda el cordel liso. El nudo desaparece por completo.

Este truco sólo le saldrá bien si hace el tercer nudo tal como se ve en nuestra figura. Unicamente en este caso todos los nudos se desharán de por sí al tirar de la cuerda. Si quiere que el truco no le falle, fíjese bien en el dibujo.

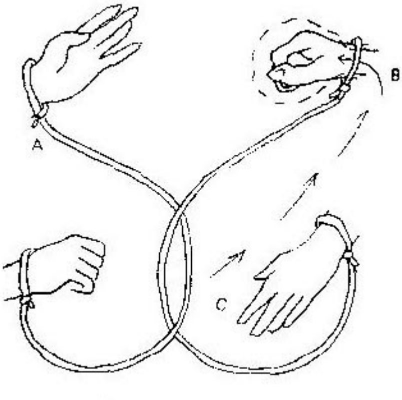


Figura 324

Liberación Ato a dos de sus compañeros —A y B— como muestra la fig. 324: los cordeles rodean las muñecas de las dos manos de cada uno y, además, se cruzan de tal modo, que sus compañeros no pueden separarse. Pero esto sólo es así al parecer. Existe un procedimiento de separar a los prisioneros sin cortar el cordel. ¿En qué consiste?

El cordel que ata las manos del compañero *A* se coge por el punto indicado en la figura por la letra *C* y se hace pasar por el lazo que rodea a la mano *B* en la dirección que señala la flecha. Cuando haya pasado ya una parte suficiente del cordel, por la lazada que se forma se mete la mano *B*, se tira del cordel *A* y los compañeros quedan separados uno del otro.

El par de botas De un papel fuerte recorte un cuadro, un par de botas y un anillo ovalado de la forma que muestra la fig. 325 y de dimensiones proporcionales a éstas. El agujero del anillo ovalado debe tener la misma anchura que la banda del cuadro, pero tiene que ser más estrecho que la caña de las botas. Por esto, si le proponen a usted que meta las botas en el marco, de manera que queden colgando como se ve en la figura, le parecerá seguramente que esto es imposible.

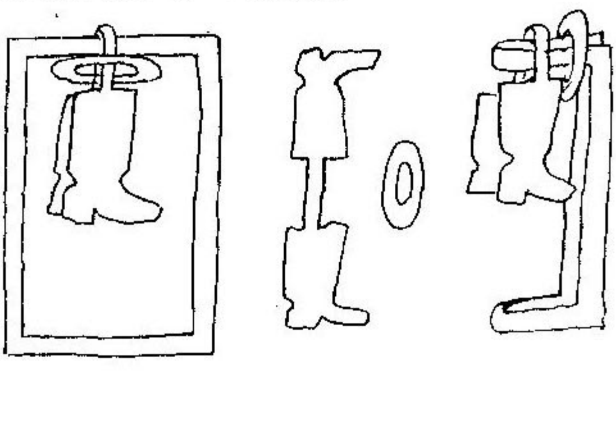


Figura 325

Sin embargo puede hacerse, si se descubre por dónde hay que empezar.

El secreto es el siguiente. Hay que doblar el cuadro de modo que una mitad quede sobre la otra. Un extremo del cuadro doblado se mete por el anillo ovalado. Por este extremo, entre las dos partes del cuadro, se hace pasar la figura desdoblada de las botas, que después se vuelve a doblar, y se corre hacia el doblez del cuadro. Luego se desplaza el anillo y se coloca sobre las cañas de las botas como requiere el problema.

Ahora ya no queda más que desdoblar el cuadro, y el problema está resuelto.

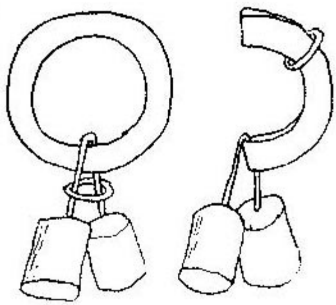


Figura 326

Los tapones en el anillo De un anillo de papel fuerte cuelgan dos tapones sujetos por un cordoncito corto, cuyos extremos pasan por una arandela de alambre (fig. 326).

Hay que sacar los tapones del anillo de papel. ¿Cómo hay que hacerlo?

Esto parece una cosa muy difícil, pero habiendo resuelto el problema anterior, podrá usted encontrar sin dificultad la solución de éste.

Hay que proceder así: doblar el anillo de papel y sacar la arandela corriéndola hacia el extremo libre; ahora ya no cuesta ningún trabajo sacar los tapones.

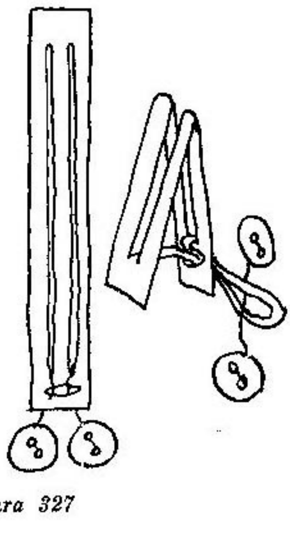


Figura 327

Los dos botones En una hoja de papel fuerte haga dos ranuras próximas entre sí, como muestra la fig. 327, y debajo de ellas recorte un agujero redondo un poco más ancho que la distancia entre las ranuras. Meta por el agujero y las ranuras un cordoncito y ate después en cada uno de sus extremos un botón lo suficientemente grande para que no quepa por el agujero.

¿Podría usted sacar los botones del papel sin desatar el cordoncito?

El secreto consiste en lo siguiente: hay que doblar la hoja de papel de manera que los extremos superior e inferior de la estrecha tira que hay entre las ranuras queden el uno sobre el otro; después hay que meter esta tira por el agujero redondo y sacar los botones haciendo pasar uno de ellos por el lazo que se forma. Ya está todo. Desdoble la hoja de papel y la tendrá separada de los dos botones.

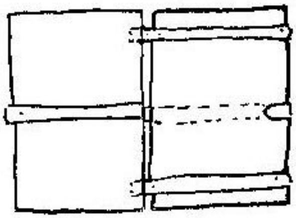


Figura 328

«Un billetero encantado» Corte de un cartón dos rectángulos del tamaño de un cuadernito de notas, por ejemplo, de 7 cm de longitud y 5 cm de anchura. Consiga tres trozos de cinta (en último caso pueden servir unas tiras de papel). Dos de ellas deben ser un centímetro más largas que la anchura de los rectángulos, y la tercera, un centímetro más larga que el doble de dicha anchura.

Pegue las tres cintas a los rectángulos como indica la fig. 328; al hacer esto, dos de los extremos de las cintas cortas dóblelos, de modo que queden debajo del cartón derecho, y péguelos a él, y los otros dos extremos péguelos a la parte trasera del rectángulo izquierdo. Un extremo de la cinta larga péguelo por la parte de fuera del rectángulo derecho, pase la cinta por debajo de él y luego por encima del rectángulo izquierdo, y pegue el otro extremo debajo de éste.

Los preparativos han terminado y el billetero «encantado» ya está hecho. Con él puede usted hacer un truco extraordinario que puede llamarse «el papel animado» o algo por el estilo. Coja un trozo de papel, en el que su amigo estampe su firma previamente para que no pueda sustituirlo por otro, y colóquelo debajo de las dos cintas. Cierre el billetero y vuélvalo a abrir. Y, ¿qué ocurre? El papel se ha salido de debajo de las dos cintas y, de un modo inesplicable para los profanos, se ha metido debajo de la única cinta que hay en el lado opuesto del billetero.

El secreto está en que, cuando usted cierra el billetero, lo abre después por la parte opuesta.

Esto es muy sencillo, pero resulta difícil de comprender para los que no conocen el truco.

Adivinación de las cerillas Cuando yo era pequeño me llamó mucho la atención un truco que hizo mi hermano mayor. Estaba yo entretenido en mi habitación, cuando oí en la de al lado unas carcajadas que despertaron mi curiosidad. Me asomé a ver lo que era. Los que se reían eran mi hermano y un amigo suyo, estudiante.

—¡Ven aquí, pequeño! Te vamos a enseñar un truco interesante.

Esto era precisamente lo que yo quería. Mi hermano era un gran animador.

—Mira —dijo mi hermano, poniendo sobre la mesa unas cerillas en desorden—. Pongo aquí de cualquier forma diez cerillas. Ahora me voy de la habitación a la cocina y tú, mientras tanto, piensa en cualquiera de ellas. Cuando la hayas pensado, llámame. Yo miraré las cerillas y te diré inmediatamente en cual de ellas habías pensado.

—Y él dirá que no era ésa —terció el amigo—. No, aquí hace falta establecer un control.

—Bueno, haremos lo siguiente: cuando el pequeño haya pensado la cerilla, que te diga cuál es. Tú serás testigo.

—Eso es otra cosa. Ahora podemos empezar.

Mi hermano salió. Yo me cercioré de que efectivamente se había ido a la cocina y de que por el ojo de la cerradura era imposible ver nada. Después, pensé en una de las cerillas, se la indiqué al estudiante sin llegar a tocarla, y él le gritó a mi hermano:

—¡Listo!

Yo no creía que mi hermano pudiera acertar la cerilla, tanto más cuando yo ni siquiera la había tocado: todas las cerillas seguían en sus puestos lo mismo que antes. ¿Cómo podía acertar?

Pero, ¡acertó! Se acercó a la mesa y señaló inmediatamente la cerilla que yo había pensado. Yo incluso procuré no mirarlo, para que la mirada no me delatara. Sin embargo, mi hermano, sin volver la vista hacia mí, la acertó. ¡Era como para volverse loco!

—¿Quieres que lo hagamos otra vez?

—¡Claro que sí!

Repetimos y ... ¡otra vez acertó! Unas diez veces volvimos a hacer el experimento, y cada una de ellas mi hermano señaló sin titubear la cerilla que yo había pensado.

A mí casi se me saltaron las lágrimas: tales eran las ganas que tenía de saber el secreto. Y, por fin, mis torturadores tuvieron lástima de mí y me dijeron lo que hacían.

¿En qué cree usted que consistía el secreto?

Once cerillas levantadas con una sola

Ponga una docena de cerillas de la forma que representa la fig. 329 y procure después levantar todo este montón cogiendo el extremo saliente de la cerilla que está debajo. Si es suficientemente hábil, lo conseguirá. Como ve, con destreza e ingenio, con una sola cerilla pueden levantarse once.

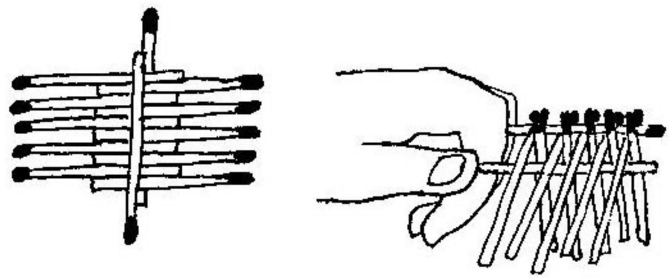


Figura 329

Este experimento puede no salir bien las primeras veces, en este caso no hay más que tener paciencia y repetirlo.

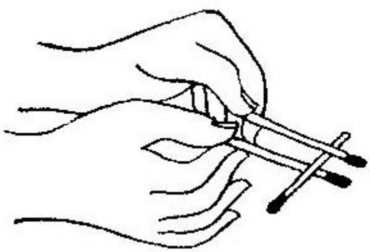


Figura 330

¿Es fácil hacerlo? ¿Qué cree usted?, ¿es fácil hacer lo que se ha representado en la fig. 330, es decir, levantar sobre los extremos de dos cerillas una tercera? Parece que es sencillo, ¿verdad? Pues, haga la prueba y se convencerá de que para hacer esto hace falta gran habilidad y mucha paciencia: la cerilla cambiará de posición al menor movimiento de sus músculos.

En una calle estrecha Dibuje en una hoja de papel una calle estrecha formada por 15 casillas (fig. 331).

Para el juego se necesita además un dado, es decir, un cubo cuyas caras estén marcadas con las cifras del 1 al 6, y dos fichas (también pueden servir dos monedas o botones).

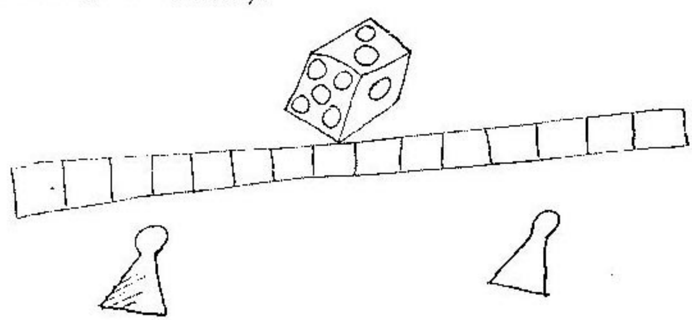


Figura 331

Las reglas del juego no son difíciles. Juegan dos personas. Cada una coloca su ficha en la primera casilla de la calle. Después echan el dado sucesivamente y el que saca más puntos comienza la partida. Cada uno de los jugadores corre su ficha hacia adelante tantas casillas como puntos saca, pero no tiene derecho a pasar la casilla ocupada por su rival. Si saca más puntos que casillas expeditas quedan, el jugador debe retroceder tantas casillas como puntos le sobren.

Esto hace que las fichas se encuentren ya en medio de la calle ya en sus mismos extremos. El juego termina cuando uno de los jugadores se ve obligado a abandonar la calle. Gana el que se queda.

Tracerías estrelladas

No todo el mundo sabe que con sólo unas tijeras, sin necesidad de instrumentos de dibujo, pueden hacerse encajes de papel variados y muy bonitos.

Coja una hoja de papel blanco y dóblela sucesivamente como indican los dibujos *A*, *B*, *C*, *D*, y *E* de la fig. 332. Cuando llegue al doblez

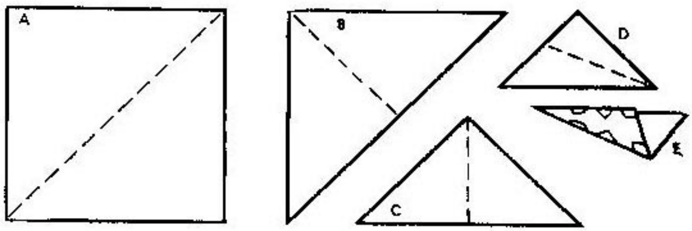


Figura 332

E, corte el papel doblado siguiendo líneas irregulares, como las que se ven representadas en la figura.

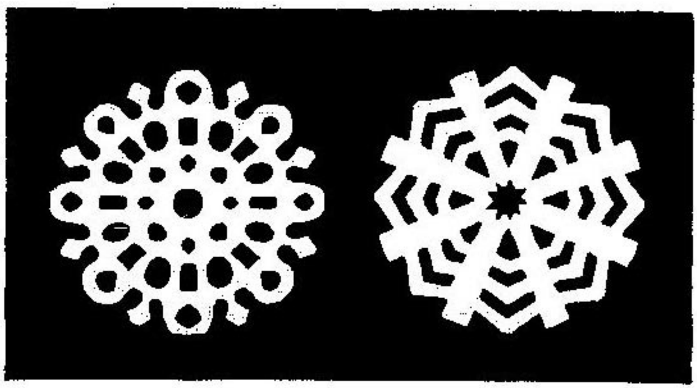


Figura 333

Si luego abre el papel y lo alisa, tendrá un bello arabesco, que resultará aún mejor si lo pega sobre un papel oscuro (fig. 333).

La estrella de cinco puntas

¿Sabe usted cómo se recorta una estrella regular de cinco puntas? Este problema no es sencillo: si no se tiene costumbre resulta una estrella de puntas desiguales.

Hay dos procedimientos de recortar estrellas perfectas y bonitas.

Por el primer procedimiento se empieza trazando una circunferencia en una hoja de papel, valiéndose de un compás o de un platillo pequeño. Después se recorta el círculo, se dobla por la mitad y el semicírculo que resulta se dobla otras cuatro veces, como muestra la fig. 334, *A*.

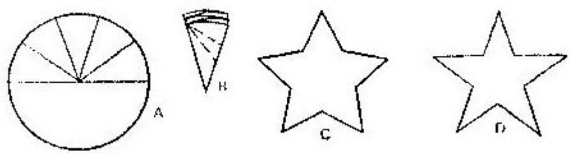


Figura 334

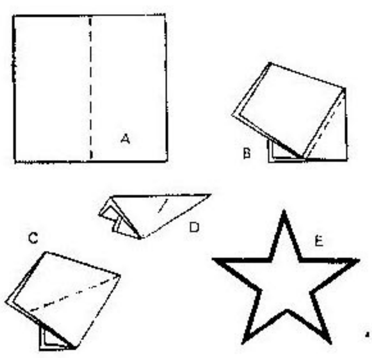


Figura 335

Esta es la parte más difícil del problema: para esto hay que saber medir bien a ojo, porque el semicírculo debe plegarse en cinco partes iguales.

Cuando el círculo ya está plegado, se corta con unas tijeras por la parte ancha, siguiendo una de las líneas de puntos indicados en la fig. 334, *B*. Al abrir después el papel, se obtiene una estrella regular de cinco puntas con los entrantes más o menos profundos (fig. 334, *C* y *D*) según lo oblicuo que se de el corte.

El segundo procedimiento quizá sea más fácil, ya que en él no se parte de un círculo, sino de un cuadrado. Se empieza por coger un papel cuadrado (fig. 335, *A*) y doblarlo por la mitad. Después se hacen tres dobleces más, como se muestra sucesivamente en la fig. 340, *B*, *C* y *D*. En la fig. 340, *D* se indica con puntos la línea de corte.

La estrella que se obtiene al extender el papel se ve en la fig. 335, *E*.

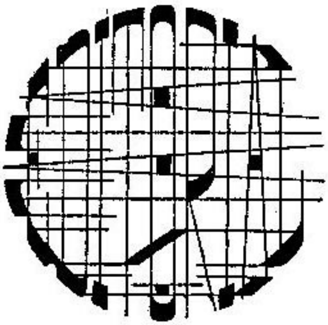


Figura 336

¿Qué hay escrito aquí?

En este círculo (fig. 336) hay algo escrito. Si lo mira de frente no distinguirá nada. Pero si se mira el círculo como es debido, pueden leerse dos palabras. ¿Cuáles son?

Parece fácil

Fíjese usted bien en el dibujo de la fig. 337 y procure retenerlo en su memoria para poderlo dibujar después sin mirarlo. ¿Lo ha retenido ya?... Pues, empiece a dibujarlo. Primero marcará los cuatro puntos finales a que deben llegar los retorcidos extremos de las líneas. La primera curva la dibuja usted, seguramente, con bastante diligencia. ¡Magnífico! Ahora traza la segunda. Pero en vano, la tozuda línea no sale como es debido. El problema resulta ser mucho más difícil quo parecía a primera vista.

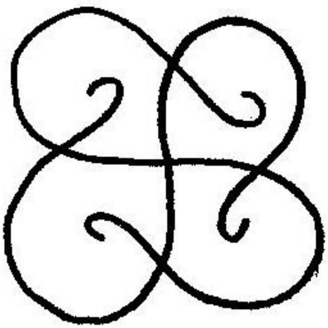


Figura 337

¿En qué pie?

¿En qué pie se apoya el futbolista, en el derecho o en el izquierdo (fig. 338)?
Parece que se apoya en el pie derecho; pero con la misma seguridad puede decirse que sobre el izquierdo.

Figura 338

Por mucho que mire el dibujo, no podrá resolver esta duda. El dibujante borró tan concienzudamente las huellas, que no será posible determinar qué pie es el que tiene levantado el futbolista y sobre cuál se apoya.

El lector me preguntará: «¿Poro usted, sabe en qué pie se apoya?». No, yo tampoco lo sé. Y el dibujante tampoco lo sabe, se le ha olvidado. De modo que esto seguirá siendo un secreto por los siglos de los siglos.

¿Hay muchos peces?

En la fig. 339 puede verse un dibujo rompecabezas. El pescador parece que no ha pescado nada todavía.

Figura 339

Pero, si se fija bien en el dibujo, verá que la pesca ha sido copiosa: ya ha cogido tres peces grandes. ¿Dónde están?

Figura 340

¿Dónde está el domador?

¿Donde está el domador de este tigre (fig. 340)? Su imagen está representada en este mismo dibujo. Búsquela.

La puesta del sol

El cuadro que aquí reproducimos (fig. 341) representa una puesta del sol. Fíjese bien y diga: ¿está bien pintado? En este dibujo hay un detalle absurdo. Descúbralo.

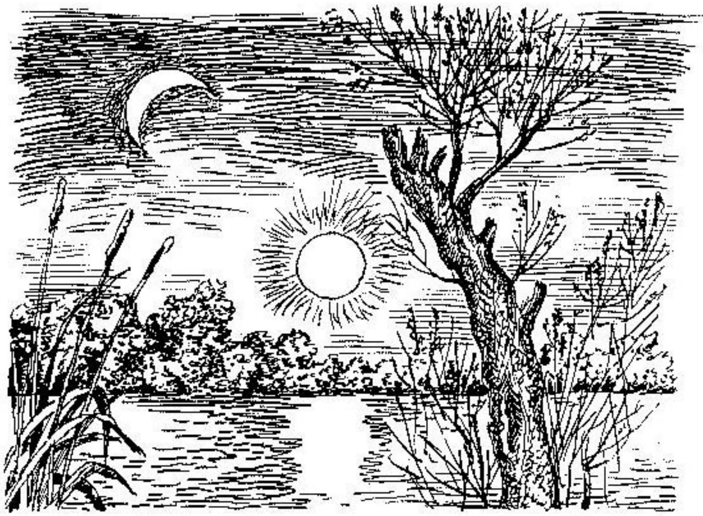


Figura 341

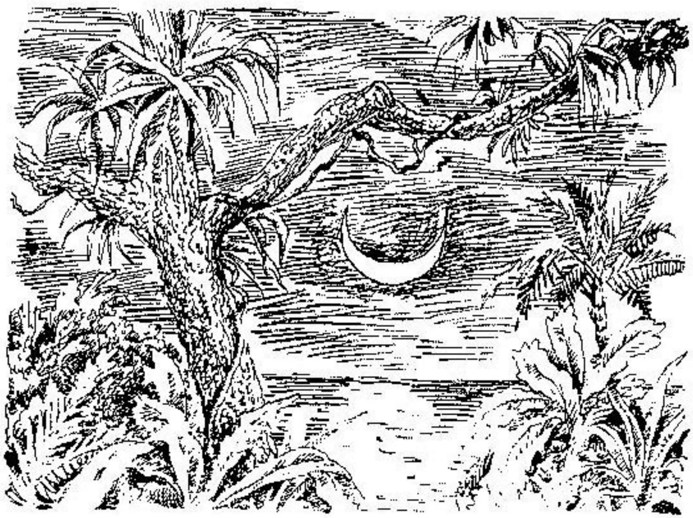


Figura 342

La **puesta** de la luna

En la fig. 342 ve usted un paisaje tropical con una rara imagen de la luna en el horizonte. ¿Está bien dibujado este cuadro? ¿No hay en él algún detalle absurdo?

SOLUCIONES

27

El palito que desaparece

Para explicar en qué se basa este truco, lo consideraremos primeramente de una forma simplificada. En la fig. 343 puede ver usted una hoja de cartón en la que están representados 13 palitos. Esta hoja está cortada diagonalmente. Si ambas partes de la hoja se desplazan un poco, como muestra el dibujo inferior de la figura, en vez de 13 palitos

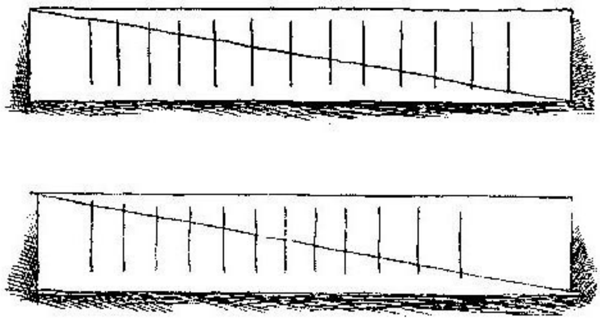


Figura 343

resultan sólo 12: uno de ellos desaparece. En este caso no es difícil comprender adónde fue a parar, porque cada uno de los 12 palitos es un poco más largo que antes, en un trocito igual precisamente a su 12-ava parte. Está claro que, al efectuar el desplazamiento, un palito se dividió en 12 partes, las cuales fueron a alargar a cada uno de los demás. Cuando las partes de la hoja de cartón se desplaza en sentido contrario, el palito desaparecido vuelve a reaparecer, a costa de un acortamiento de los otros.

Los palitos dispuestos circularmente (véase la fig. 322) poseen esta misma peculiaridad: cuando el círculo gira un ángulo pequeño, uno de los 13 palitos desaparece, se distribuye en partes iguales entre los 12 restantes.

Adivinación de las cerillas

El secreto consistía en que me engañaban. El estudiante, que debía controlar la adivinación, era en realidad cómplice de mi hermano y le hacía señas.

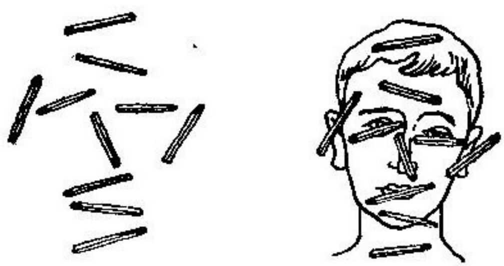


Figura 344

¿Cómo? Ese es el quid del truco. Resulta que las cerillas no se encontraban en la mesa de cualquier forma, sino que mi hermano las dispuso de tal modo (fig. 344), que podían dar a entender partes del rostro humano: la cerilla superior representaba el cabello; la que estaba debajo de ella, la frente; después iban los ojos, la nariz, la boca, la barbilla y el cuello, y a los lados, los oídos. Cuando mi hermano entraba en la habitación, lo primero que hacía era mirar al supuesto controlador, y éste se llevaba la mano a la nariz, al cuello, al ojo derecho o al oído izquierdo y, sin que yo me diera cuenta, le daba a entender cuál era la cerilla en que yo había pensado.

¿Qué hay escrito aquí?

Llévese el círculo a los ojos como muestra la fig. 345. Primero podrá leer claramente «editorial», y después, girando el círculo un cuarto de vuelta hacia la derecha, verá la palabra «estatal».

Figura 345

Las letras se han alargado y estrechado mucho y por eso es difícil leerlas de frente. Pero cuando nuestra vista se desliza a lo largo de las letras, su longitud disminuye mientras su anchura sigue siendo la misma. Por esto las letras toman su forma habitual y lo escrito se lee sin dificultad.

¿Hay muchos peces?

Le ayudaré al lector a buscar la pesca. Un pez está cabeza abajo sobre la espalda del pescador. Otro, entre la punta de la caña y el anzuelo. El tercero se encuentra debajo de sus pies.

¿Dónde está el domador?

El ojo del tigre es a la vez ojo del domador, cuya cara mira sin embargo hacia el lado opuesto.

La puesta del sol

El detalle absurdo de este dibujo es que la luna tiene su parte convexa no por el lado del sol, si no por el contrario. Pero si la luna recibe la luz del sol, no puede en modo alguno tener vuelta hacia él su parte no iluminada.

«La mayoría de los pintores —dice con respecto a esta cuestión el insigne astrónomo francés Flammarion— aún no saben esto, porque no pasa año sin que en el Salón de París (sala de exposiciones) aparezca un gran número de lunas invertidas».

La puesta de luna

Aunque parezca raro, en la fig. 342 está bien representada la luna. Este es un pasaje tropical, y en los trópicos la posición de la luna se diferencia de la que tiene en las latitudes medias del hemisferio norte. En éstas, la luna creciente tiene los «cuernos a poniente» y la menguante, los «cuernos a levante». Pero en los países tropicales la luna está como colgada *horizontalmente*.

Ocurre esto por lo siguiente. En los países del hemisferio norte el sol y la luna (lo mismo que todos los astros) siguen durante su movimiento diario circunferencias inclinadas; por esto, cuando el sol ilumina a la luna por las noches, se encuentra debajo del horizonte en *dirección oblicua*, alumbra a la luna por la derecha o por la izquierda y los cuernos de ésta miran a la izquierda o a la derecha. En cambio, en el ecuador todos los astros se mueven por arcos verticales; el sol que alumbra a la luna no se halla a su derecha ni a su izquierda, sino *debajo de ella*. La luna es iluminada desde abajo y por eso toma la forma de góndola que reproduce la figura.

A NUESTROS LECTORES:

«Mir» edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otras idiomas extranjeros.

Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial «Mir», I Rizhski per., 2, 129820 Moscú, I-110, GSP, URSS.